Wasserbehälter = I- oder P-Strecke?

Von Jean-Claude Feltes, Doris Mancini

Dass in der Regelungstechnik nicht immer alles so einfach ist, wenn man es genauer betrachtet, zeigte eine heftige Diskussion unter Lehrern zum Thema: Kann ein Wasserbehälter als Strecke mit einem I-Regler geregelt werden?

Für uns war zunächst alles klar: ein Wasserbehälter ist eine I-Strecke. Diese macht 90° Phasendrehung, der Regler als reiner I-Regler ebenfalls, die Gegenkopplung noch 180°, alles in allem also 360°, und das System ist instabil!

So steht es auch im regelungstechnischen Klassiker [1].

Auch eine Simulation bestätigt diese einfache Überlegung: egal wie man die Parameter von Strecke und Regler festlegt, es ergibt sich eine anschwellende Schwingung. Nur die Frequenz ist unterschiedlich.

Eine weitere Bestätigung ergab ein erster Praxistest mit LN-Demomaterial: Der Wasserstand schoss weit über den Sollwert hinaus, nahm wieder ab wobei der Behälter trocken lief, und das Spiel wiederholte sich wieder von vorn.

Alles schien also klar, bis jemand mit teuflischer Spitzfindigkeit den Gedanken ins Spiel warf, dass bei einem Loch im Boden des Behälters der Abfluss nicht konstant ist, sondern mit der Wasserhöhe im Behälter stärker wird.

Oho! Nichts ist so, wie es scheint!

Eine détaillierte Analyse schien angebracht.

Festlegungen:
Regelgrösse X = Wasserstand h
Stellgrösse Y = Ventilöffnung des Zuflusses

Zu- und Abfluss : $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

A = Grundfläche des Behälters

1. Ohne Abfluss, mit konstantem Zufluss:

Klarer Fall, der Wasserstand steigt linear an bis zum Überlauf (Übersteuerung).
Es wird über die zufliessende Wassermenge summiert (integriert), also: I-Strecke.

Pro Zeitintervall Δt fliesst ein Volumen ΔV = Qzu·Δt zu.

Dies ergibt einen Höhenanstieg um $\Delta h = \frac{\Delta V}{A} = \frac{Qzu}{A} = t$

Die nach einer Zeit t erreichte Höhe ergibt sich durch Aufsummieren aller Δh, oder beim Übergang zu unendlich kleinen Zeitintervallen, als

$$h = \int dh \, .$$

(Die Integrationsgrenzen 0 und t sind hier und bei den folgenden Formeln der Einfachheit halber weggelassen worden)

Also:
$$h = \int \frac{Qzu}{A} \, dt$$

$$h = \frac{1}{A} \int Qzu \, dt \qquad (1)$$

Die Formel (1) ist auch für variierende Zu- oder Abflüsse d.h. positive oder negative Q gültig

2. Mit druckunabhängigem Abfluss als Störgrösse

Wenn wir annehmen, dass Qab unabhängig von der Wasserhöhe ist, also z.B. durch eine Pumpe mit festem Q bewirkt wird, gilt (1), mit Q = Qzu – Qab:

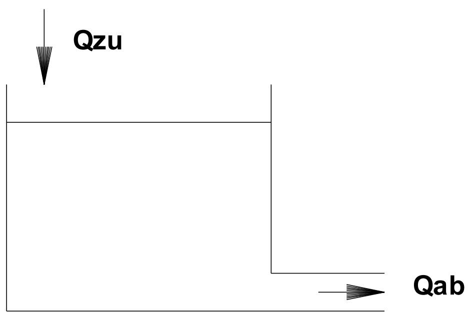
$$h = \frac{1}{A} \int Q \, dt$$

$$h = \frac{1}{A} \int (Qzu \quad Qab) \cdot dt \qquad (2)$$

Wir haben also eindeutig I-Verhalten.

3. Mit druckabhängigem Abfluss

Was geschieht, wenn das Wasser nicht abgepumpt wird, sondern unter dem Einfluss der Schwerkraft durch ein Loch im Boden aus dem Behälter entweicht?



a) Theoretische Überlegung

Ein oben in Ruhe befindliches (Wkin = 0) Volumenelement ΔV sinkt langsam nach unten und wandelt dabei die potenzielle Energie Wpot in kinetische Energie Wkin um, wenn es aus dem Behälter austritt:

Wkin = Wpot

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2gh} \qquad (3)$$

Somit ist der Abfluss also abhängig von der Wasserhöhe im Behälter:

$$Q_{ab} = \frac{\Delta Vab}{\Delta t} = \frac{A_{ab}\Delta x}{\Delta t} = A_{ab}\, v$$

Durch Einsetzen von v:

$$Q_{ab} = A_{ab} \sqrt{2 \cdot gh} \qquad (3a)$$

Das Wasser fliesst also umso schneller ab, je grösser die Abflussöffnung ist (logisch!), aber auch je höher es im Behälter steht. Und hier ergibt sich ein Unterschied zum einfachen I-Verhalten.

Um die Differenzialgleichung für die Höhe zu bekommen berechnen wir den Höhenunterschied Δh für ein Zeitintervall Δt.

Zunächst gilt: ΔV = (Qzu - Qab)·Δt

Mit ΔV = A· Δh und $Q_{ab} = A_{ab} \sqrt{2 \cdot gh}$:

$$\Delta h = \frac{1}{A}\left(Q_{zu} - A_{ab}\sqrt{2gh}\right) \Delta t$$

Division durch Δt ergibt die gesuchte Differenzialgleichung:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_{zu}}{A} - \frac{A_{ab}}{A}\sqrt{2gh} \qquad (4)$$

Dies ist eine nichtlineare Differenzialgleichung, das Ergebnis wird also keine reine Exponenzialfunktion sein, also kein reines PT1-Verhalten. Aber es ist denkbar, dass sich bei bestimmten Verhältnissen ein stabiler Endwert ergibt, also auch kein I-Verhalten.

Wir vereinfachen die Gleichung zu

$$\frac{dh}{dt} = a \quad b\sqrt{h} \qquad (5)$$

mit $a = \frac{Q_{zu}}{A}$ und $b = \frac{A_{ab}}{A}\sqrt{2g}$ (6)

Ein Versuch, die Gleichung zu knacken [2] dreht den Spiess um:

$$\frac{dt}{dh} = \frac{1}{a - b\sqrt{h}}$$

also:

$$dt = \frac{1}{a - b\sqrt{h}}\,dh \qquad (7)$$

und durch Integration:

$$t = \int \frac{1}{a - b\sqrt{h}}\,dh \qquad (8)$$

Dieses Integral kann durch Substitution mit $u = a \quad b\sqrt{h}$ gelöst werden und man erhält

$$t = \frac{2(a - b\sqrt{h})}{b^2} \quad a \;\ln(a - b\sqrt{h}) \qquad (9)$$

Dies müsste nun nach h umgestellt werden um h = f(t) zu erhalten, die gewünschte Funktion für die Wasserhöhe als Funktion der Zeit. Ein schwieriges Unterfangen (ist es überhaupt möglich ?).

Aber die vorliegende Form erlaubt uns schon die Frage zu beantworten ob sich für $t \to \infty$ ein stabiler Endwert ergibt und wo er liegt. Denn diese Frage ist äquivalent mit der Frage ob es einen h-Wert gibt bei dem $t \to \infty$ geht.

Wenn man sich die Formel (9) anschaut gibt es dafür zwei Möglichkeiten:

$2(a - b\sqrt{h}) = \infty$, also $h \to -\infty$ was ausgeschlossen werden kann,

$\ln(a - b\sqrt{h}) = -\infty$, also $(a - b\sqrt{h}) \quad 0$

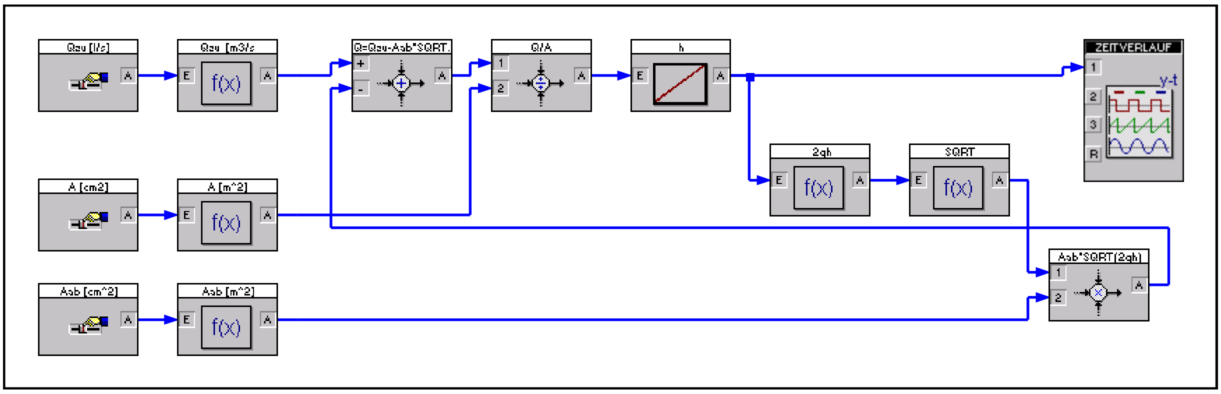
$$\to h = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Mit (6):

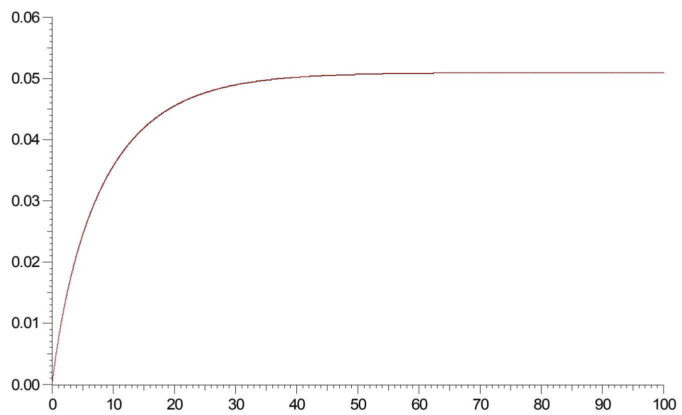
$$h = \frac{Q_{zu}^2}{A_{ab}^2 \cdot 2g} \qquad (10)$$

b) Überprüfung des Ergebnisses durch WINFACT-Simulation

Laut (10) würde sich bei einem Aufbau mit Qzu = 0.1l/s bei einer Grundfläche von $100cm^2$ und einer Abflussöffnung von $1cm^2$ eine stabile Höhe von 5.1cm ergeben.



Dies wird von der Simulation bestätigt:



c) Nachtrag: eine Abkürzung zur Formel (10)

Unser Kollege André Jacobs machte uns darauf aufmerksam, dass es eine bestechend elegante Abkürzung zur Formel (10) für den statischen Endwert des Füllstandes gibt.
Seine Überlegung geht folgendermaßen:
Wenn es einen Gleichgewichtszustand gibt, dann nur bei Qab = Qzu.
Durch Umstellen der Formel (3a) nach h hat man dann sofort die statische Füllstandshöhe.

Sind damit unsere obigen Überlegungen völlig umsonst?
Wir glauben nicht, denn es ergeben sich immerhin einige interessante Erkenntnisse daraus:

- das zeitliche Verhalten wird durch eine nichtlineare Differentialgleichung bestimmt, das Verhalten ist also kein einfaches PT1-Verhalten
- die zeitliche Abhängigkeit h = f(t) kann nicht durch einen einfachen mathematischen Ausdruck wiedergegeben werden, was für eine derart simple Anordnung schon erstaunlich ist.

Literatur:

[1] E. Samal / W.Becker
Grundriss der praktischen Regelungstechnik
Oldenbourg

[2] D. Acheson
Vom Calculus zum Chaos
Oldenbourg