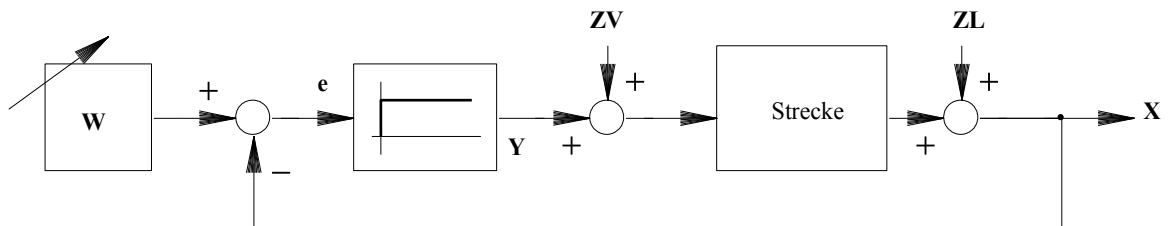


# PI-, PD- und PID-Regler

## 1. Wiederholung: Statisches Führungs- und Störverhalten

Unter welchen Bedingungen ergibt sich eine möglichst kleine Regelabweichung?



### Aufgabe 1

Leite für den obigen Regelkreis mit Versorgungs- und Laststörung die Formel für den statischen Wert der Regelgröße her, in Abhängigkeit von  $w$ ,  $z_V$  und  $z_L$ .

Vorgehensweise:

- Gleichungen für Strecke, Regler und Vergleicher aufstellen
- Gleichungssystem nach  $x$  auflösen

Ergebnis:

$$x_b = \frac{K_{PR} K_{PS}}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot w + \frac{K_{PS}}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot z_V + \frac{1}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot z_L$$

Zur Erinnerung:

Diese Formel läßt sich leicht merken:

- unter dem Bruchstrich steht bei jedem Term  $1 +$  Ringverstärkung
- über dem Bruchstrich steht das betrachtete Signal mal die Verstärkung der Blöcke die es durchläuft.

### Führungsverhalten:

keine Störung  $\rightarrow z_V = 0, z_L = 0$

$$x_b = \frac{K_{PR} K_{PS}}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot w$$

Wir möchten eine möglichst kleine Regelabweichung haben, also im Idealfall  $x_b = w$ .

Dies kann erreicht werden durch einen möglichst hohen Proportionalbeiwert des Reglers, denn

$$\lim_{K_{PR} \rightarrow \infty} x_b = w$$

**Störverhalten (Versorgungsstörung):**

keine Änderung der Führungsgröße, keine Laststörung  $\rightarrow w=0, z_L=0$

$$x_b = \frac{K_{PS}}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot z_V$$

Wir möchten eine möglichst gute Ausregelung der Störung, also im Idealfall  $x_b=0$  .

Dies kann auch hier erreicht werden durch einen möglichst hohen Proportionalbeiwert des Reglers, denn

$$\lim_{K_{PR} \rightarrow \infty} x_b = 0$$

**Störverhalten (Laststörung):**

keine Änderung der Führungsgröße, keine Versorgungsstörung  $\rightarrow w=0, z_V=0$

$$x_b = \frac{1}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot z_L$$

Wir möchten eine möglichst gute Ausregelung der Störung, also im Idealfall  $x_b=0$  .

Dies kann erreicht werden durch einen möglichst hohen Proportionalbeiwert des Reglers, denn

$$\lim_{K_{PR} \rightarrow \infty} x_b = 0$$

**Zusammenfassung:**

Für eine möglichst kleine Regelabweichung und eine möglichst gute Ausregelung der Störung wird ein hoher Proportionalbeiwert des Reglers gefordert.

**Problem:**

Bei PTn-Strecken oder Strecken mit Totzeit führt ein hoher Proportionalbeiwert des Reglers zu starkem Überschwingen oder sogar zu Instabilität.

**Der Einsatz eines I-Anteils im Regler kann dieses Problem lösen.**

Man kann ein I-Glied als P-Glied mit kleinem  $K_{PR}$  für plötzliche Änderungen (hohe Frequenzen) und großem  $K_{PR}$  für langsame Änderungen betrachten. Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, kann eine Regelung mit I-Anteil den Sollwert genau erreichen bzw. eine Störung komplett ausregeln.

## 2 I-Regler

Reine I-Regler werden selten angewandt, denn sie haben 2 Nachteile:

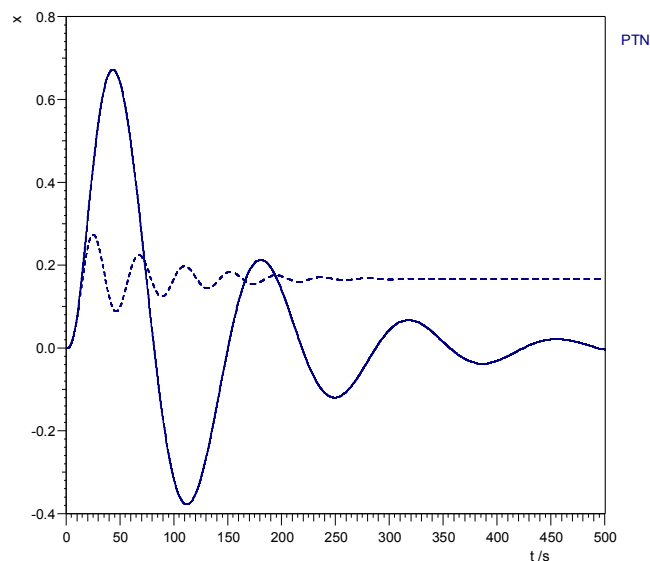
- Die Reaktion erfolgt langsam
- Der Regler bringt eine zusätzliche Verzögerung in den Regelkreis, wenn ein reiner I-Regler verwendet wird. Dies kann (wie eine Verzugszeit der Strecke) zu Instabilität führen.

Mit der Frequenzgangmethode kann man zeigen dass ein I-Regler eine frequenzunabhängige Phasendrehung von  $-90^\circ$  hat. Zusammen mit der Phasendrehung der Strecke, die bei PTn ebenfalls  $-90^\circ$  erreichen kann, wird die Gegenkopplung des Regelkreises in eine Mitkopplung verwandelt und das System wird instabil.

Um diese Nachteile zu vermeiden benutzt man in der Praxis PI- oder PID-Regler. Dadurch wird der Regler schneller und der Regelkreis stabiler.

(Beim PI-Regler ist die Phasenverschiebung frequenzabhängig und kleiner als  $90^\circ$ , so dass Instabilität weniger wahrscheinlich ist).

Beispiel: Störverhalten im Vergleich mit I-Regler / P-Regler



### Aufgabe 2

Identifiziere die Kurven für den I- und für den P-Regler im Diagramm.

### Aufgabe 3

Untersuche in BORIS das Störverhalten (Laststörung) eines Regelkreises mit einer Ptn-Strecke dritter Ordnung ( $K_{PS} = 1$ ,  $T_s = 10s$ )

- mit P-Regler  
Ab welchem Wert für KPR wird das System instabil?
- Mit I-Regler  
Ist der Regelkreis stabil?  
Wird die Störung vollständig ausgeregelt?

### 3 PID-Regler als Industriestandard (Allgemeines)

Industrielle Regler sind praktisch immer als PID-Regler aufgebaut, d.h. die Stellgröße  $Y$  ergibt sich aus der Addition eines P-, eines I- und eines D-Anteils. So werden die Vorteile der einzelnen Regler kombiniert.

Zusammengefasst:

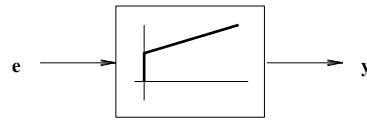
P-Regler	+ -	schnell bleibende Regelabweichung
I-Regler	+ -	keine bleibende Regelabweichung Der Sollwert wird erreicht, die Störung wird nach genügend langer Zeit vollständig ausgeregelt. langsam, Stabilitätsprobleme bei trägen Strecken
D-Regler	+ -	reagiert stark auf schnelle Abweichungen vom Sollwert allein nicht anwendbar da $Y=0$ wenn $X=const$

Eine treffende Beschreibung der einzelnen Anteile liefert Schlüter:

- P-Anteil:  
*„Je größer die Regeldifferenz, desto stärker die Reaktion“*
- I-Anteil:  
*„Je länger die Regeldifferenz ansteht, desto stärker die Reaktion“*
- D-Anteil:  
*„Je schneller die Regeldifferenz sich ändert, desto stärker die Reaktion“*

Wir wollen nun der Reihe nach PI-, PD- und PID-Regler genauer betrachten.

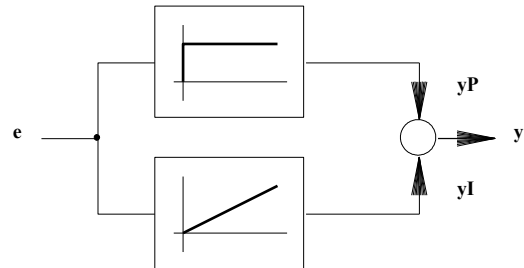
## 4 PI-Regler



### a) Gleichung im Zeitbereich (Prinzip)

$$y = y_P + y_I$$

$$y = K_{PR} \cdot e + \frac{1}{T_I} \int e \cdot dt$$



### b) Sprungantwort

#### Aufgabe 4

Zeichne für das Beispiel:  $e = 1V$ ,  $K_{PR} = 2$ ,  $T_I = 10s$

- in einem Diagramm die Signale  $e$ ,  $y_P$ ,  $y_I$
- in einem zweiten Diagramm die Stellgröße  $y$  des PI-Reglers

Es gibt in diesen Diagrammen zwei wichtige Zeiten:

- die Integrierzeit  $T_I$  ist die Zeit, bei der der I-Anteil der Stellgröße gleich dem Eingangssignal ist,
- **die Nachstellzeit  $T_N$  ist die Zeit, bei der der I-Anteil der Stellgröße gleich dem P-Anteil ist.**

**Achtung: diese Definitionen beziehen sich nur auf die Sprungantwort!**

#### Aufgabe 5

Leite ausgehend von der Definition der der Nachstellzeit eine Formel her, mit der  $T_N$  aus  $K_{PR}$  und  $T_I$  berechnet werden kann. Überprüfe die Berechnung am Beispiel.

Ergebnis:

$$T_N = K_{PR} \cdot T_I$$

**Achtung: Bei Industrieregler werden nicht  $K_{PR}$  und  $T_I$ , sondern  $K_{PR}$  und  $T_N$  eingestellt.**

#### Aufgabe 6

Auf welchen Wert müsste bei einem Industrieregler die Nachstellzeit eingestellt werden, wenn man einen reinen P-Regler haben will und sich der I-Anteil nicht abschalten lässt? Überlege mit der Sprungantwort.

### c) Gleichung im Zeitbereich mit $K_{PR}$ und $T_N$

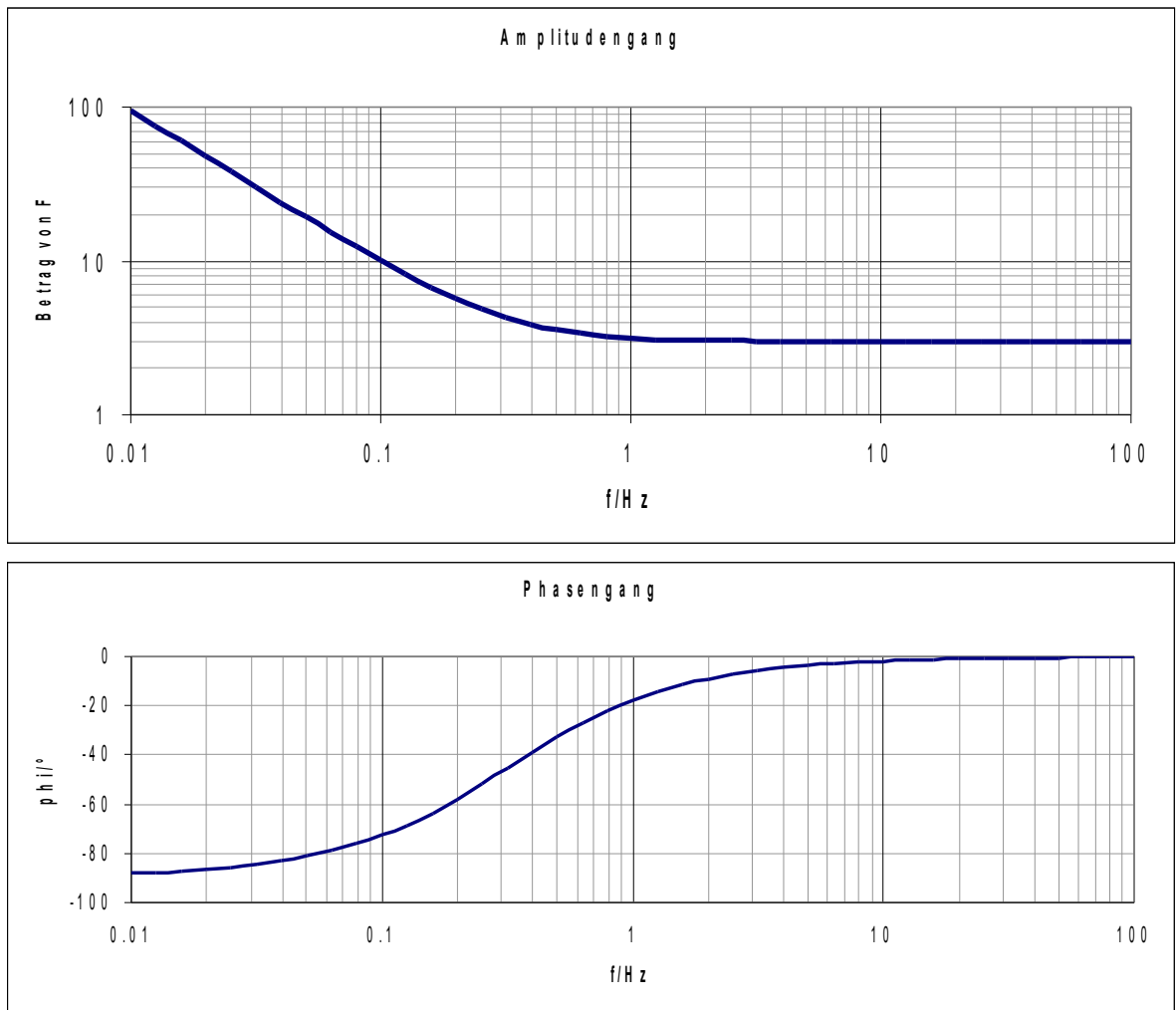
$$y = K_{PR} \cdot e + \frac{1}{T_I} \int e \cdot dt \quad \text{mit} \quad T_I = \frac{T_N}{K_{PR}}$$

$$y = K_{PR} \left( e + \frac{1}{T_N} \int e \, dt \right)$$

### d) Frequenzgang eines PI-Reglers

Mit der Frequenzgang-Methode (siehe T3EE "Ancien régime") kann das Frequenzverhalten leicht hergeleitet und in einem sogenannten **Bodediagramm** dargestellt werden.

Beispiel:



Das obere Diagramm zeigt den Betrag der Verstärkung. Diese ist für Frequenzen oberhalb von ca. 1Hz konstant und durch den P-Anteil des Reglers bestimmt. Je tiefer die Frequenz (langsame Änderungen), desto höher die Verstärkung.

Das untere Diagramm enthält den Phasengang. Bei Frequenzen oberhalb von ca. 1Hz hat der Regler keine Phasenverschiebung. Das heißt dass er unverzögert auf schnelle Änderungen der Regelgröße reagieren kann. Je tiefer die Frequenz, desto mehr nähert sich die Phasenverschiebung dem Wert für einen I-Regler, nämlich  $-90^\circ$ .

**Aufgabe 7**

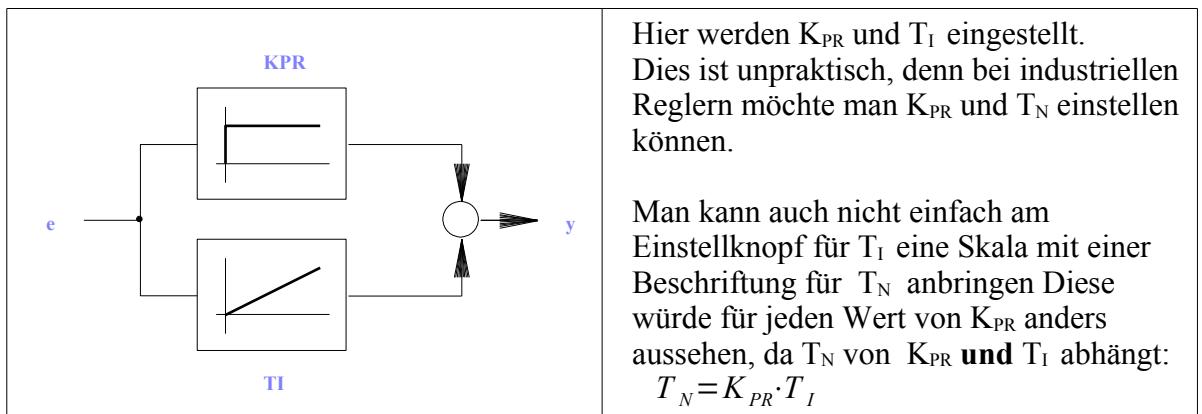
- a) Bestimme aufgrund der obigen Überlegungen den Proportionalbeiwert des P-Anteils des Reglers mit obigem Frequenzgang.
- b) *Knobelaufgabe:*  
*In diesem Beispiel beträgt die Nachstellzeit 0.5s*  
*Kann man diese Information auch im Frequenzgang finden?*

**e) Blockschaltbild eines industriellen PI-Reglers**

Am naheliegendsten ist die **nicht interaktionsfreie Parallelstruktur**.

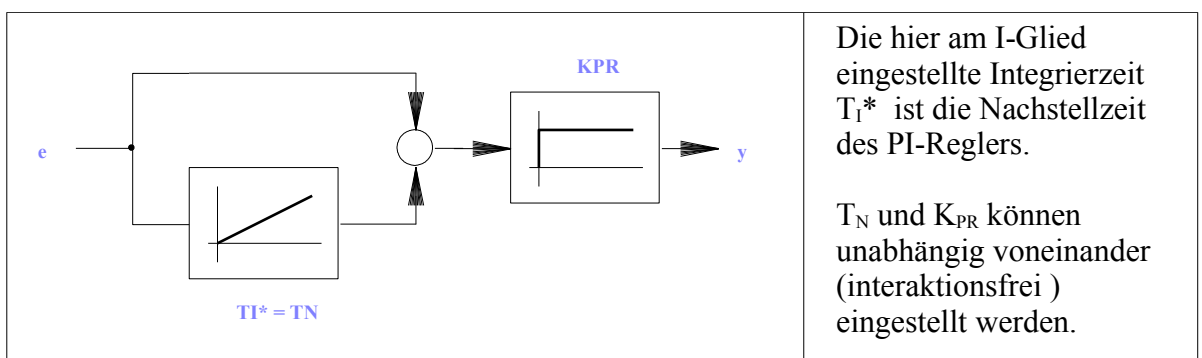
Sie entspricht der Gleichung  $y = K_{PR} \cdot e + \frac{1}{T_I} \int e \cdot dt$

**Dies ist nicht die praktisch verwendete Schaltung!**



Die bei industriellen Reglern angewendete **interaktionsfreie Struktur** geht von der Gleichung mit  $T_N$  aus:

$$y = K_{PR} \left( e + \frac{1}{T_N} \int e dt \right)$$



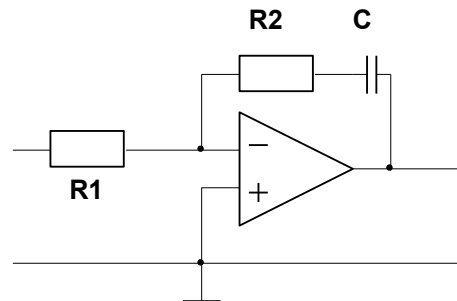
Das Proportionalglied kann auch am Eingang statt am Ausgang der Schaltung liegen.

**Aufgabe 8**

Entwerfe eine Schaltung mit OPV bei der man  $K_{PR}$  von 1 bis 10 und  $T_N$  von 2 bis 5s einstellen kann.

### f) Invertierender PI-Regler mit einem OPV

Diese Schaltung wird eher selten angewendet, da sie nicht interaktionsfrei ist. Sie kann aber wegen ihrer Einfachheit interessant sein, wenn  $T_N$  und  $K_{PR}$  nicht einstellbar sein müssen.

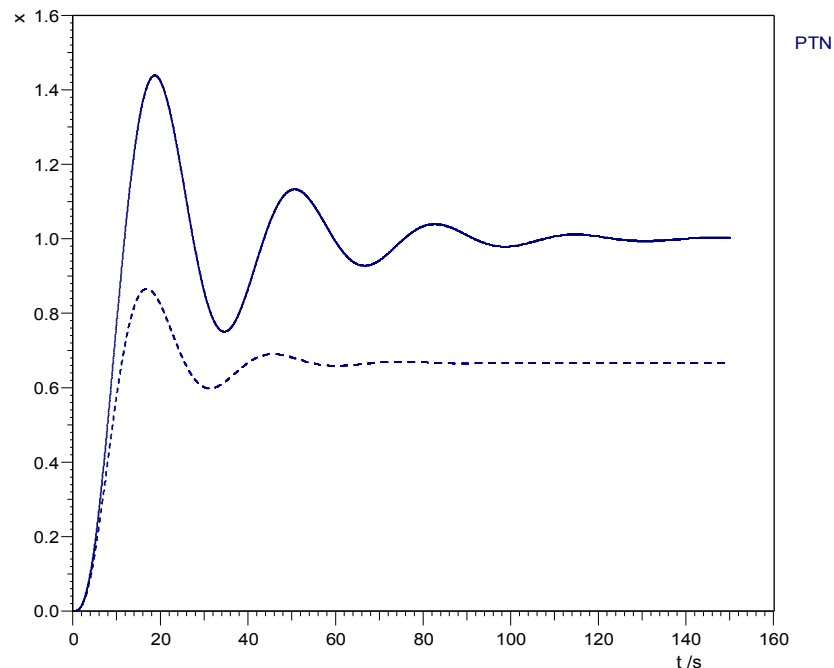


Für schnelle Änderungen des Eingangssignals (hohe Frequenzen) wirkt C wie ein Kurzschluss, so dass die Schaltung wie ein Invertierender Verstärker mit einer Verstärkung von  $-R_2/R_1$  wirkt.

Der Proportionalbeiwert des P-Anteils ist als  $K_{PR} = R_2/R_1$

Bei langsamen Änderungen (tiefe Frequenzen) wird der Blindwiderstand des Kondensators so groß, dass  $R_2$  vernachlässigt werden kann. Nun wirkt die Schaltung als invertierender Integrator mit einer Integrierzeit  $T_I = R_1 \cdot C$

### g) Beispiel für das dynamische Führungsverhalten

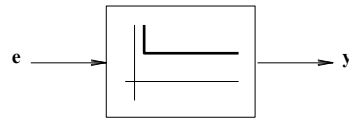


#### Aufgabe 9

Das Diagramm zeigt das Führungsverhalten eines Regelkreises, einmal mit P- und einmal mit PI-Regler. Welcher Sollwert war eingestellt? Welche Kurve gehört zum PI- und welche zum P-Regler? Warum?



## 5. PD-Regler



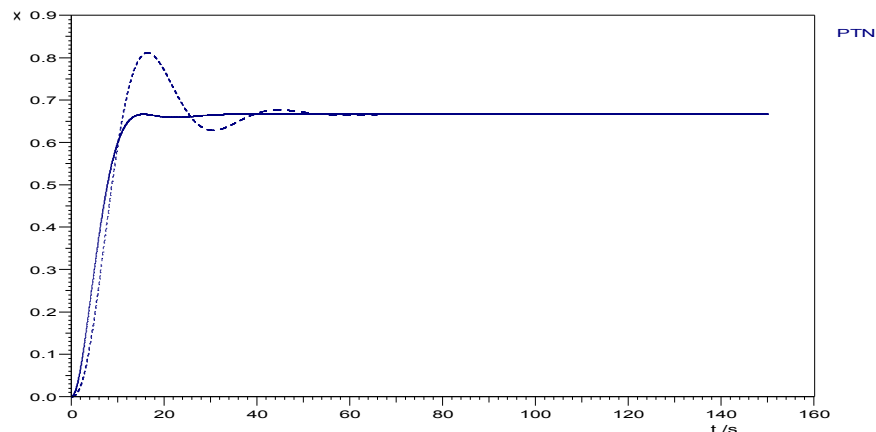
### a) Vorteile

- PD-Regler reagieren stark, wenn sich die Regelgröße plötzlich vom Sollwert entfernt
- Der D-Anteil hat eine stabilisierende Wirkung auf Regelkreise mit Strecken höherer Ordnung.

Richtig eingestellt ergibt sich mit D-Anteil weniger Überschwingen als bei einem reinen P-Regler.

Instabile Regelkreise können unter Umständen mit einem D-Anteil stabilisiert werden.

Beispiel: Führungsverhalten PT3,  $T_s = 5s$  bei  $w=1$



(gestrichelt: mit PD-Regler mit  $K_{PR} = 2$ ,  
durchgezogen mit PD-Regler mit  $K_{PR} = 2$ ,  $T_D = 5s$ )

Nachteil: wie beim P-Regler gibt es eine bleibende Regelabweichung.

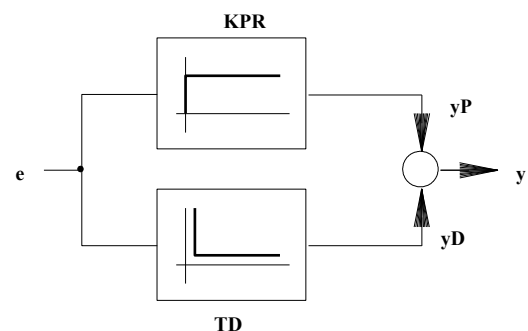
Praktisches Beispiel: Schwebende Kugel:

<http://staff.ltam.lu/feljc/school/asser/SchwebendeKugel1.pdf>

### b) Gleichung im Zeitbereich (Prinzip)

$$y = y_P + y_D$$

$$y = K_{PR} \cdot e + T_D \cdot \frac{de}{dt}$$



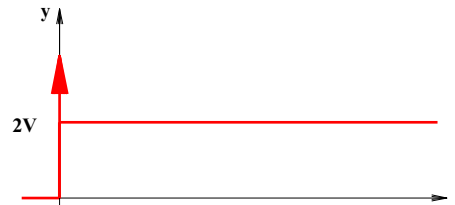
In der Praxis wird für das D-Glied ein DT1-Glied gewählt. Warum? (Siehe D0, DT1).

### c) Sprungantwort

Wegen des D-Anteils ist die Sprungantwort wenig aussagekräftig.

Bei einem **PD-Regler mit reinem D0** würde im Moment des Sprungs (theoretisch!) am Ausgang ein Diracstoß erscheinen, danach würde das Eingangssignal mit dem Faktor  $K_{PR}$  verstärkt erscheinen.

Beispiel für  $e = 1V$ ,  $K_{PR} = 2$ :



Von diesem Verhalten ist das Schaltzeichen abgeleitet.  
Die Sprungantwort enthält keine Information über  $T_D$ !

Bei einem **PDT1-Regler**, wie er in der Praxis vorkommt, wird der Eingangssprung nicht unendlich hoch verstärkt, sondern nur mit der **Vorhaltverstärkung  $V_D$** .

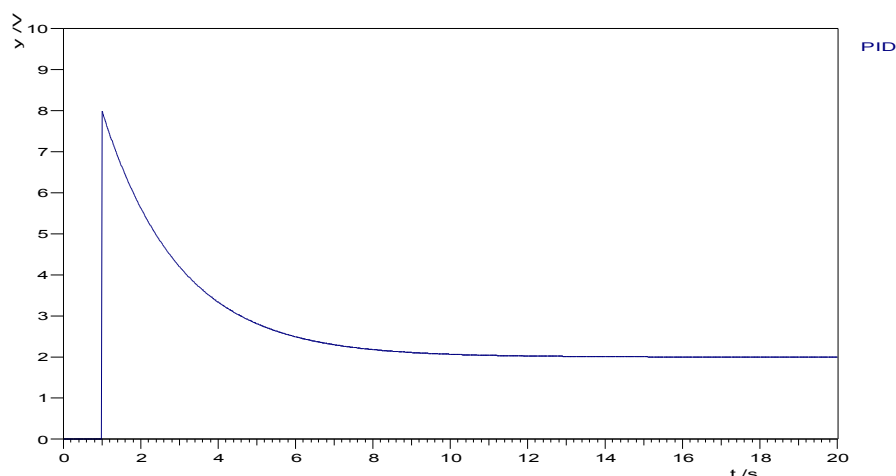
Dies wird erreicht, indem vor oder hinter das D-Glied ein Tiefpass (PT1) geschaltet wird. So wird die Verstärkung für hohe Frequenzen auf die Vorhaltverstärkung begrenzt.

In der Sprungantwort ergibt sich statt des Diracstoßes ein Nadelimpuls mit der Zeitkonstanten  $T$ . Dies ist die Zeitkonstante des Tiefpasses (PT1). die Höhe des Pulses ist durch die Vorhaltverstärkung definiert.

### Aufgabe 10

Das folgende Diagramm zeigt die Sprungantwort eines PDT1-Reglers bei einem Eingangssprung von 2V zum Zeitpunkt  $t=1s$ .

Bestimme daraus  $K_{PR}$ ,  $V_D$  und  $T_D$ .

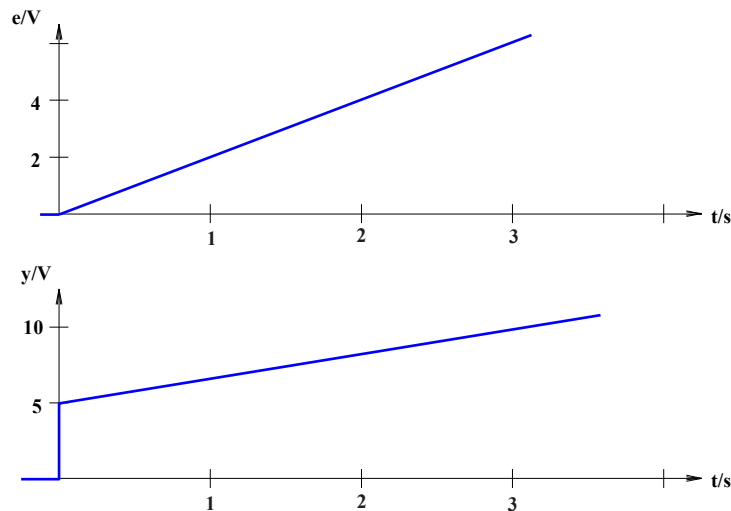


In der Praxis ist dieses Verfahren meist untauglich, da die Unsicherheiten bei der Messung des Spitzenwertes und der Zeitkonstanten zu fehlerbehafteten Werten für  $T_D$  führen.

### d) Anstiegsantwort

Wegen des D-Anteils ist es sinnvoller, statt der Sprungantwort die Anstiegsantwort aufzunehmen.

Beispiel für einen PD-Regler mit reinem D-Anteil:



Bei einem PDT1-Regler sieht die Sprungantwort ähnlich aus, wegen der Verzögerung ist aber der Sprung am Anfang exponentiell abgerundet mit der Zeitkonstanten  $T$ .

**Aufpassen:** die Anstiegsantwort ähnelt auf den ersten Blick der Sprungantwort des PI-Reglers, sie stellt aber etwas anderes dar!

#### Aufgabe 11

Zerlege die Kurve von  $y$  in P- und D-Anteil.

Bestimme daraus die Parameter  $K_{PR}$  und  $T_D$  des Reglers.

#### Aufgabe 12

Was würde sich am Diagramm ändern, wenn der Regler einen 1.5x so starken D-Anteil hätte?

### e) Vorhaltezeit

Die Wirkung des D-Anteils wird durch  $T_D$  beschrieben.

Je größer  $T_D$ , desto stärker der D-Anteil.

Ähnlich wie beim PI-Regler benutzt man praktisch aber lieber eine Zeit, die es erlaubt, die Wirkung von P- und D-Anteil miteinander zu vergleichen, die Vorhaltezeit  $T_v$ .

Die Vorhaltezeit  $T_v$  ist die Zeit, die bei der Anstiegsantwort vergeht, bis der P-Anteil die gleiche Wirkung wie der D-Anteil hat.

Beachte: beim PI-Regler ist der P-Anteil schneller als der I-Anteil. Beim PD-Regler ist der P-Anteil langsamer als der D-Anteil.

#### Aufgabe 13

Zeichne  $T_v$  im Diagramm ein.

**Aufgabe 14**

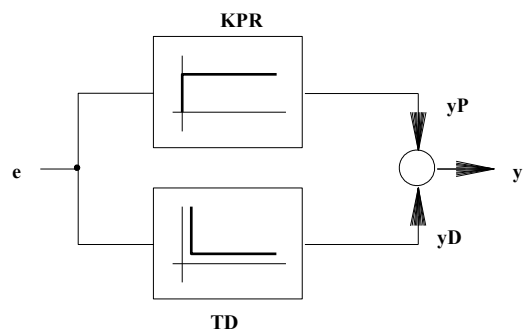
Leite aus den Gleichungen für PD-Regler und Anstiegsfunktion und der Definition der Vorhaltezeit den Zusammenhang zwischen  $T_V$ ,  $T_D$  und  $K_{PR}$  her. Berechne  $T_V$  und vergleiche mit dem grafisch ermittelten Wert.

Ergebnis: 
$$T_V = \frac{T_D}{K_{PR}}$$

**f) Interaktionsfreie Blockschaltung**

Die Grundgleichung des PD-Reglers führt zu einer Blockschaltung bei der man  $K_{PR}$  und  $T_D$  einstellen kann:

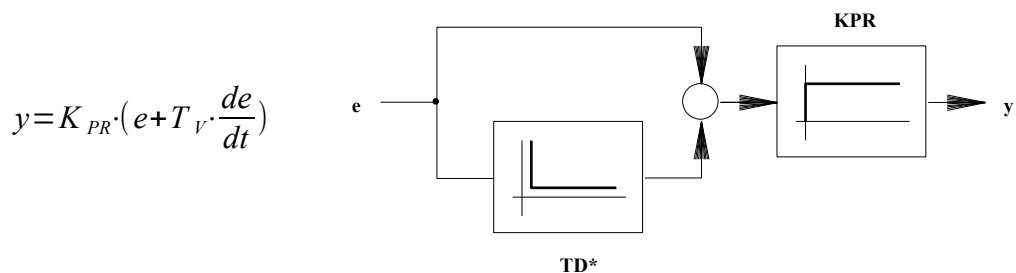
$$y = K_{PR} \cdot e + T_D \cdot \frac{de}{dt}$$



Bei Industrieregeln möchte man aber  $K_{PR}$  und  $T_V$  einstellen.

Mit der Beziehung  $T_V = \frac{T_D}{K_{PR}}$  kann man die Grundgleichung umstellen

und erhält so die interaktionsfreie Struktur

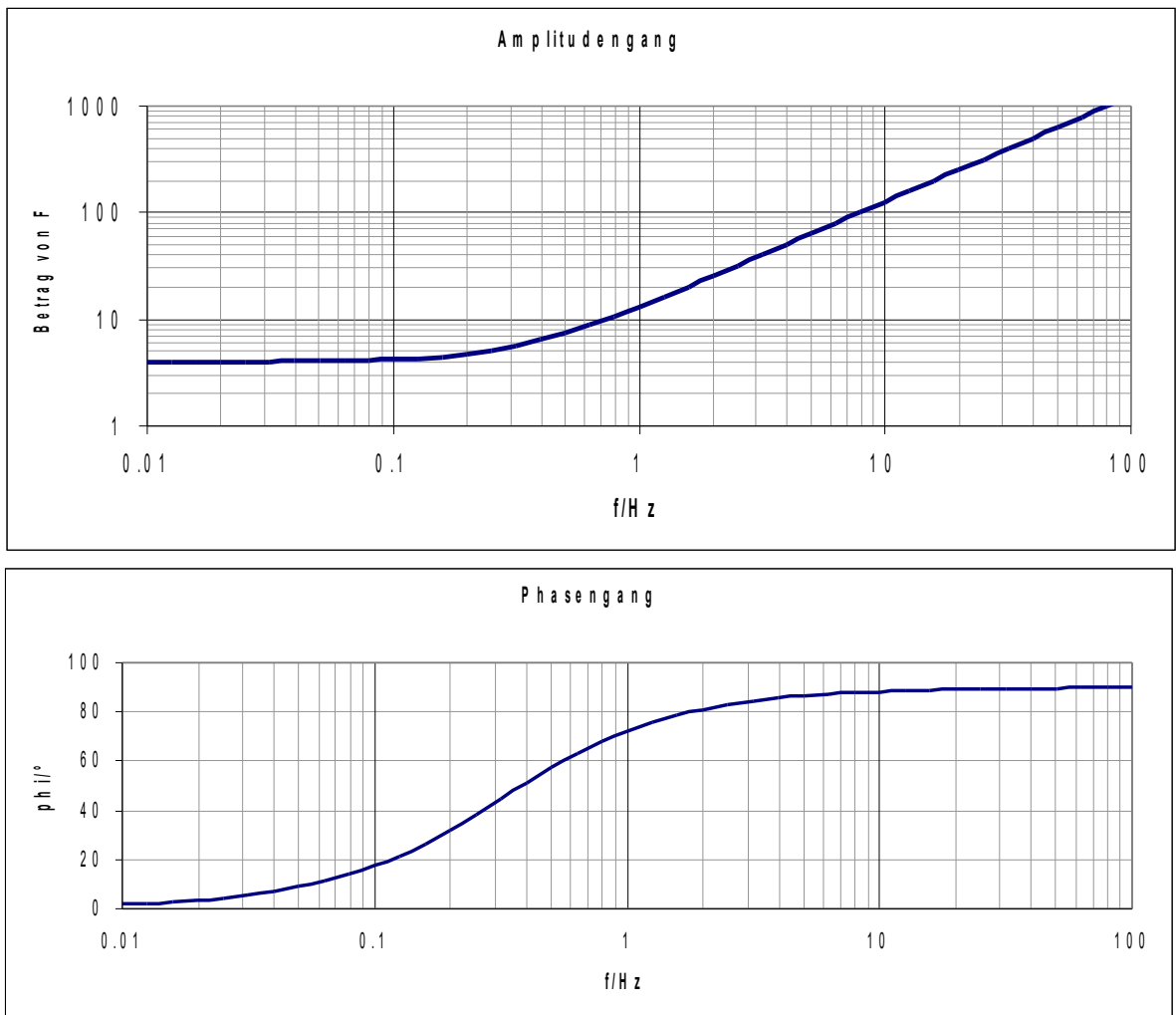


In dieser Schaltung ist die einstellbare Differenzierzeit  $TD^* = T_V$  die Vorhaltezeit des Reglers.

$K_{PR}$  und  $T_V$  lassen sich interaktionsfrei einstellen.

### g) Frequenzverhalten des PD-Reglers

Beispiel mit  $K_{PR} = 4$  und  $T_V = 0.5s$ :



Bei tiefen Frequenzen (langsame Änderungen) ist die Verstärkung des Reglers konstant und durch  $K_{PR} = 4$  bestimmt. In diesem Bereich gibt es keine Phasenverschiebung. Der Regler funktioniert als P-Regler.

Bei schneller Änderung der Regelgröße hat man es mit hohen Frequenzanteilen zu tun. Hier wird der D-Anteil wirksam, die Verstärkung steigt mit zunehmender Frequenz an. So kann der Regler stark auf schnelle Änderungen reagieren. In diesem Bereich ist die Phasendrehung nahe an  $+90^\circ$  (voreilend).

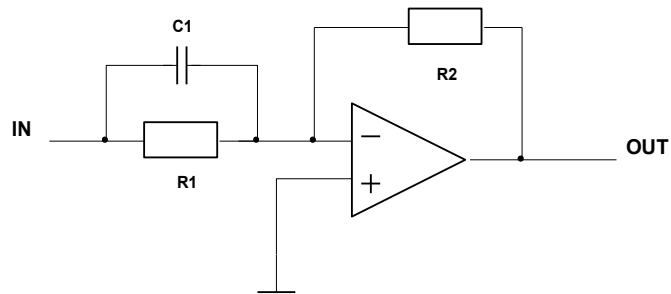
Beim PDT1-Regler, wie er in der Praxis vorkommt, steigt die Verstärkung mit zunehmender Frequenz nicht immer weiter an, sondern sie wird auf die Vorhaltverstärkung  $V_D$  begrenzt.

#### Aufgabe 15

Versuche den Parameter  $T_V$  aus dem Bodediagramm zu ermitteln.

### h) Invertierende PD-Schaltung mit einem OPV

Die folgende Schaltung kann man für einen Regler mit festen Parametern benutzen:

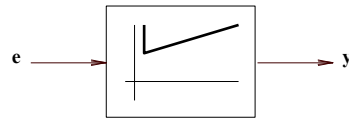


#### Aufgabe 16

Wie verhält sich die obige Schaltung für langsame und schnelle Änderungen der Eingangsspannung? Passt das zum PD-Regler?

Wovon hängen  $K_{PR}$  und  $T_V$  ab?

## 6. PID-Regler



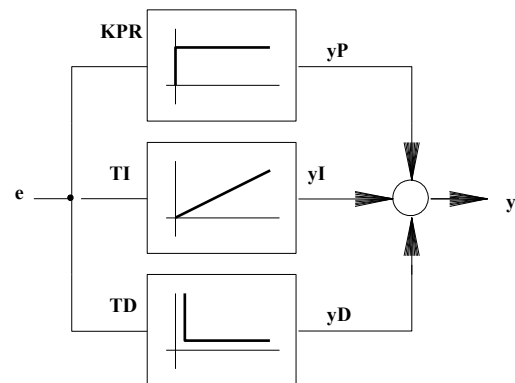
### a) Vorteile

- der P-Anteil reagiert schnell
- der D-Anteil reagiert stark bei schnellen Änderungen der Regelgröße und hat eine stabilisierende Wirkung auf Regelkreise mit Strecken höherer Ordnung.
- Der I-Anteil sorgt dafür, dass es keine bleibende Regelabweichung gibt.

### b) Gleichung im Zeitbereich (Prinzip)

$$y = y_P + y_I + y_D$$

$$y = K_{PR} \cdot e + \frac{1}{T_I} \int e \, dt + T_D \cdot \frac{de}{dt}$$

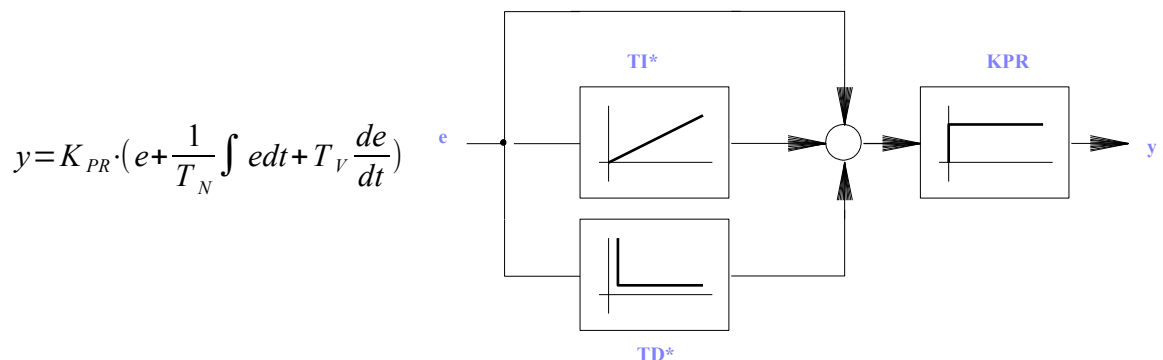


### c) Interaktionsfreie Blockschaltung

Aus der Formel für den Frequenzgang mit  $T_N$  und  $T_V$  ergibt sich die interaktionsfreie Blockschaltung, wie sie bei Industrieregeln benutzt wird.

Hier müssen  $K_{PR}$ ,  $T_N$  und  $T_V$  unabhängig voneinander eingestellt werden können.

Mit den Beziehungen  $T_N = K_{PR} \cdot T_I$  und  $T_V = \frac{T_D}{K_{PR}}$  kann die Grundgleichung umgestellt werden und es ergibt sich die interaktionsfreie PID-Struktur:

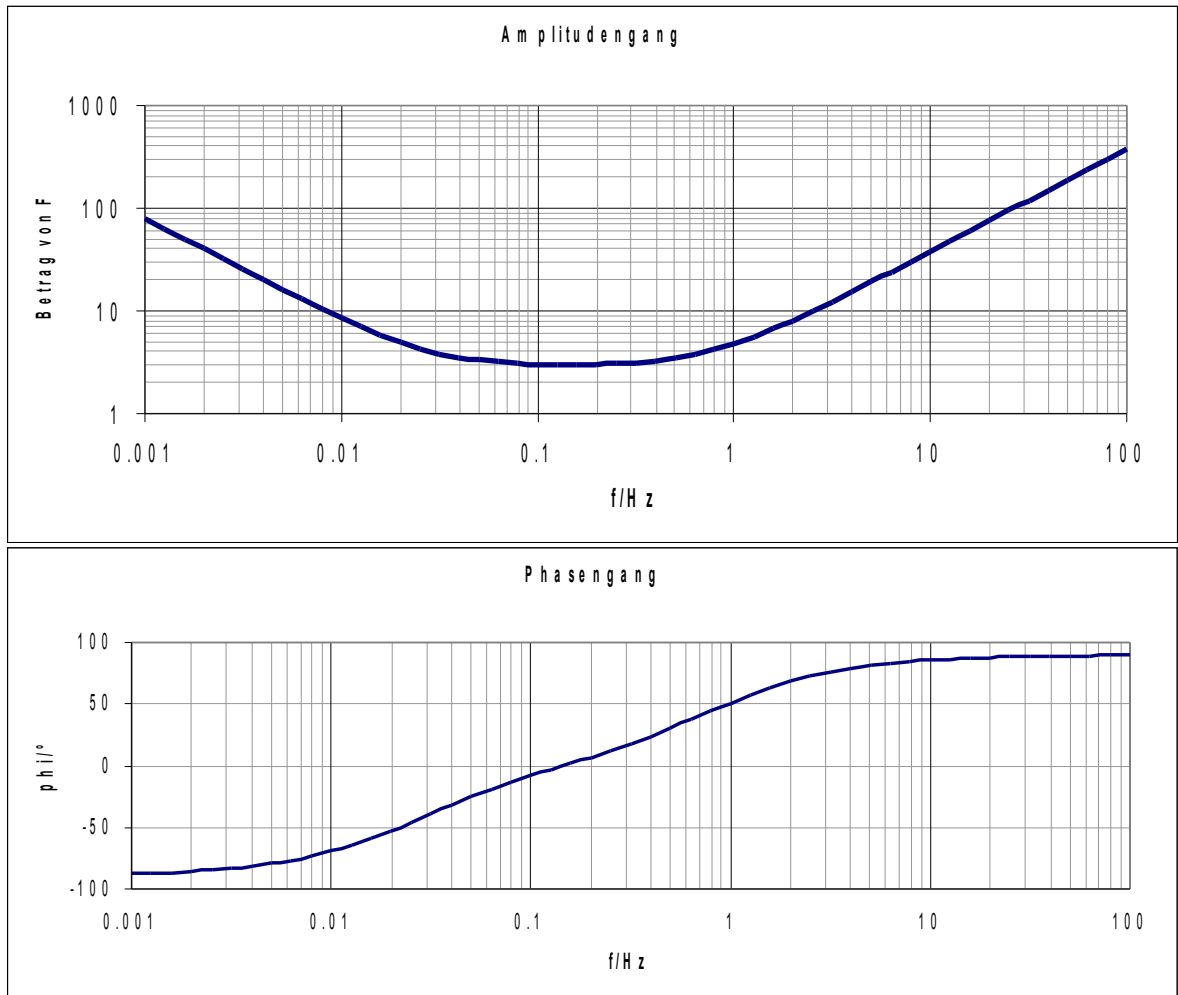


$$y = K_{PR} \cdot \left( e + \frac{1}{T_N} \int e \, dt + T_V \frac{de}{dt} \right)$$

Achtung: hier ist  $T_N = T_I^*$  und  $T_V = T_D^*$

#### d) Frequenzverhalten eines PID-Reglers

Beispiel für ein Bodediagramm:



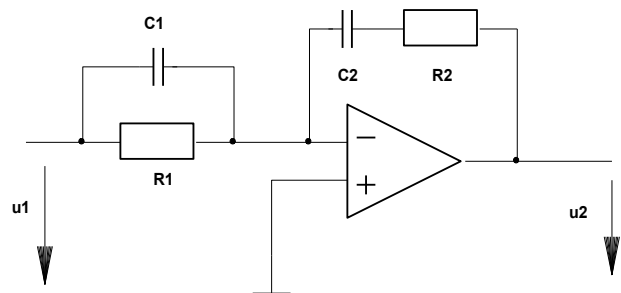
Für tiefe Frequenzen (langsame Änderungen) wirkt die Schaltung wie ein I-Regler, sie hat hohe Verstärkung. So kann der I-Anteil die Regelabweichung praktisch auf Null bringen, wenn genügend Zeit zur Verfügung steht.

Für hohe Frequenzen (schnelle Änderungen) wirkt die Schaltung wie ein D-Regler, sie hat hohe Verstärkung. So kann der D-Anteil stark reagieren, wenn die Regelgröße schnell von ihrem Sollwert abweicht.

Für mittlere Frequenzen ist die Verstärkung mehr oder weniger durch den P-Anteil festgelegt und relativ klein. Dies hat den Vorteil, dass der Regelkreis bei diesen Frequenzen nicht zu Instabilität neigt.

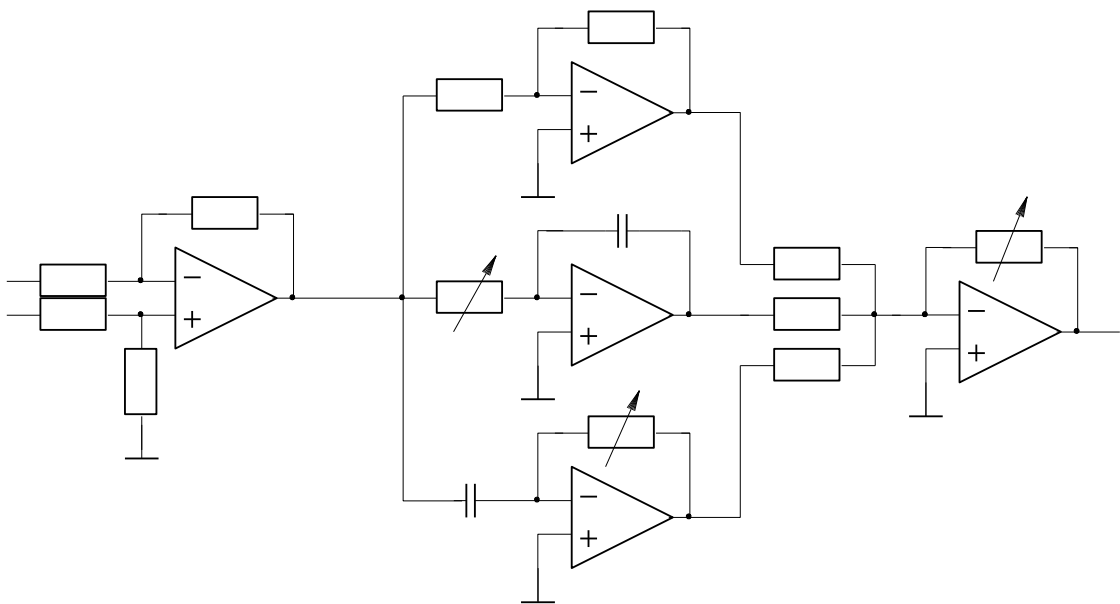


### e) Invertierender PID-Regler mit einem OPV



Diese Schaltung ist nur bei festen Parametern anwendbar, da sie nicht interaktionsfrei ist.

### f) Interaktionsfreier PID-Regler mit OPV



#### Aufgabe 17

Analysiere die Schaltung.

Beschrifte Ein- und Ausgänge, die Signale innerhalb der Schaltung und die Funktion der Potentiometer.

Zeichne ein Blockschaltbild der Schaltung.