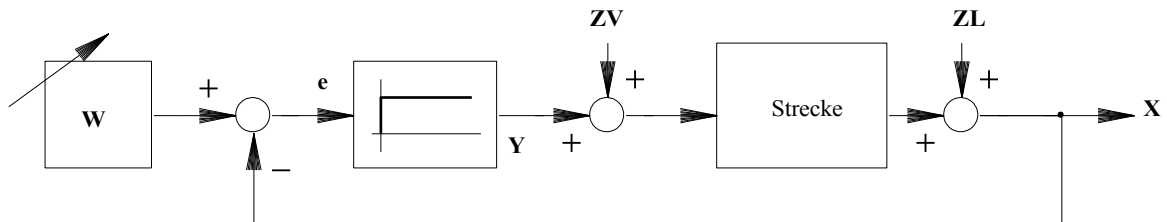


Frequenzganganalyse, Teil 4: PI-, PD- und PID-Regler

4.1 Wiederholung: Statisches Führungsverhalten und Störverhalten

Unter welchen Bedingungen ergibt sich eine möglichst kleine Regelabweichung?



Aufgabe 4.1

Leite für den obigen Regelkreis mit Versorgungs- und Laststörung die Formel für den statischen Wert der Regelgröße her, in Abhängigkeit von w , z_V und z_L .

Vorgehensweise:

- Gleichungen für Strecke, Regler und Vergleicher aufstellen
- Gleichungssystem nach x auflösen

Ergebnis:

$$x_b = \frac{K_{PR} K_{PS}}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot w + \frac{K_{PS}}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot z_V + \frac{1}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot z_L$$

Zur Erinnerung:

Diese Formel läßt sich leicht merken:

- unter dem Bruchstrich steht bei jedem Term $1 +$ Ringverstärkung
- über dem Bruchstrich steht das betrachtete Signal mal die Verstärkung der Blöcke die es durchläuft.

Führungsverhalten:

keine Störung $\rightarrow z_V = 0, z_L = 0$

$$x_b = \frac{K_{PR} K_{PS}}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot w$$

Wir möchten eine möglichst kleine Regelabweichung haben, also im Idealfall $x_b = w$.

Dies kann erreicht werden durch einen möglichst hohen Proportionalbeiwert des Reglers, denn

$$\lim_{K_{PR} \rightarrow \infty} x_b = w$$

Störverhalten (Versorgungsstörung):

keine Änderung der Führungsgröße, keine Laststörung $\rightarrow w=0, z_L=0$

$$x_b = \frac{K_{PS}}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot z_V$$

Wir möchten eine möglichst gute Ausregelung der Störung, also im Idealfall $x_b=0$.

Dies kann auch hier erreicht werden durch einen möglichst hohen Proportionalbeiwert des Reglers, denn

$$\lim_{K_{PR} \rightarrow \infty} x_b = 0$$

Störverhalten (Laststörung):

keine Änderung der Führungsgröße, keine Versorgungsstörung $\rightarrow w=0, z_V=0$

$$x_b = \frac{1}{1 + K_{PR} K_{PS}} \cdot z_L$$

Wir möchten eine möglichst gute Ausregelung der Störung, also im Idealfall $x_b=0$.

Dies kann erreicht werden durch einen möglichst hohen Proportionalbeiwert des Reglers, denn

$$\lim_{K_{PR} \rightarrow \infty} x_b = 0$$

Zusammenfassung:

Für eine möglichst kleine Regelabweichung und eine möglichst gute Ausregelung der Störung wird ein hoher Proportionalbeiwert des Reglers gefordert.

Problem:

Bei PTn-Strecken führt ein hoher Proportionalbeiwert des Reglers zu starkem Überschwingen oder sogar zu Instabilität.

Der Einsatz eines I-Anteils im Regler kann dieses Problem lösen.

Man kann ein I-Glied als P-Glied mit kleinem K_{PR} für plötzliche Änderungen (hohe Frequenzen) und großem K_{PR} für langsame Änderungen betrachten (siehe Bodediagramm und Sprungantwort). Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, kann eine Regelung mit I-Anteil den Sollwert genau erreichen bzw. eine Störung komplett ausregeln.

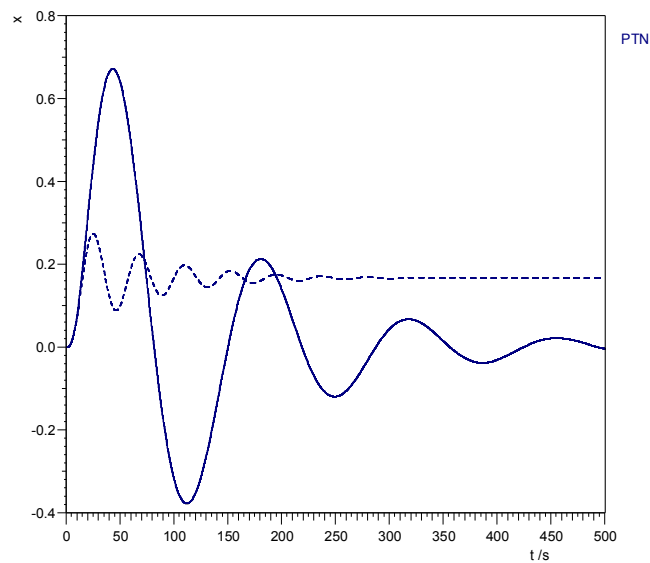
4.2 I-Regler

Reine I-Regler werden selten angewandt, denn sie haben 2 Nachteile:

- die Reaktion erfolgt langsam
- durch die Phasendrehung von -90° kann sich je nach der Phasendrehung der Strecke die Gegenkopplung des Regelkreises in eine Mitkopplung verwandeln. In diesem Fall wird das System instabil.

Um diese Nachteile zu vermeiden benutzt man in der Praxis PI- oder PID-Regler.

Beispiel: Störverhalten im Vergleich mit I-Regler / P-Regler



Aufgabe 4.2

Identifiziere die Kurven für den I- und für den P-Regler im Diagramm.

Aufgabe 4.3

Untersuche in BORIS das Störverhalten (Laststörung) eines Regelkreises mit einer Ptn-Strecke dritter Ordnung ($K_{PS} = 1$, $T_S = 10s$)

- mit P-Regler
Ab welchem Wert für KPR wird das System instabil?
- Mit I-Regler
Ist der Regelkreis stabil?
Wird die Störung vollständig ausgeglet?

Aufgabe 4.4

Ist ein Regelkreis mit I-Strecke und I-Regler stabil?

Betrachte die Phasendrehungen im Blockschaltbild.

4.3 PID-Regler als Industriestandard (Allgemeines)

Industrielle Regler sind praktisch immer als PID-Regler aufgebaut, d.h. die Stellgröße Y ergibt sich aus der Addition eines P-, eines I- und eines D-Anteils. So werden die Vorteile der einzelnen Regler kombiniert.

Zusammengefasst:

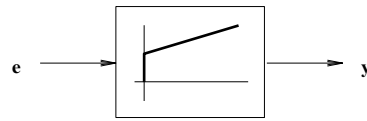
P-Regler	+	schnell
	-	bleibende Regelabweichung
I-Regler	+	keine bleibende Regelabweichung (Sollwert wird erreicht, Störung wird nach genügend langer Zeit vollständig ausgeregelt)
	-	langsam, Stabilitätsprobleme bei trägen Strecken
D-Regler	+	reagiert stark auf schnelle Abweichungen vom Sollwert
	-	allein nicht anwendbar da $Y=0$ wenn $X=const$

Eine treffende Beschreibung der einzelnen Anteile liefert Schlüter:

- P-Anteil:
„Je größer die Regeldifferenz, desto stärker die Reaktion“
- I-Anteil:
„Je länger die Regeldifferenz ansteht, desto stärker die Reaktion“
- D-Anteil:
„Je schneller die Regeldifferenz sich ändert, desto stärker die Reaktion“

Wir wollen nun der Reihe nach PI-, PD- und PID-Regler genauer betrachten.

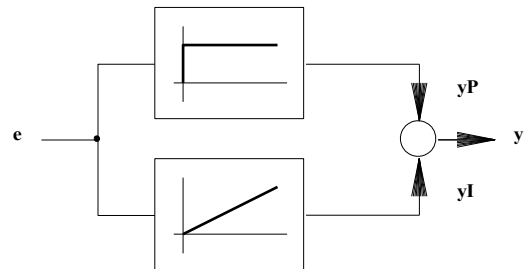
4.4 PI-Regler



a) Gleichung im Zeitbereich (Prinzip)

$$y = y_P + y_I$$

$$y = K_{PR} \cdot e + \frac{1}{T_I} \int e \cdot dt$$



b) Sprungantwort

Aufgabe 4.5

Zeichne für das Beispiel: $e = 1V$, $K_{PR} = 2$, $T_I = 10s$

- in einem Diagramm die Signale e , y_P , y_I
- in einem zweiten Diagramm die Stellgröße y des PI-Reglers

Es gibt in diesen Diagrammen zwei wichtige Zeiten:

- die Integrierzeit T_I ist die Zeit, bei der der I-Anteil der Stellgröße gleich dem Eingangssignal ist,
- die Nachstellzeit T_N ist die Zeit, bei der der I-Anteil der Stellgröße gleich dem P-Anteil ist.

Achtung: diese Definitionen beziehen sich nur auf die Sprungantwort!

Aufgabe 4.6

Leite ausgehend von der Definition der der Nachstellzeit eine Formel her, mit der T_N aus K_{PR} und T_I berechnet werden kann. Überprüfe die Berechnung am Beispiel.

Ergebnis:

$$T_N = K_{PR} \cdot T_I$$

Bei Industrieregler werden nicht K_{PR} und T_I , sondern K_{PR} und T_N eingestellt.

Aufgabe 4.7

Auf welchen Wert müsste bei einem Industrieregler die Nachstellzeit eingestellt werden, wenn man einen reinen P-Regler haben will und sich der I-Anteil nicht abschalten lässt? Überlege mit der Sprungantwort.

c) Gleichung im Zeitbereich mit K_{PR} und T_N

$$y = K_{PR} \cdot e + \frac{1}{T_I} \int e \cdot dt \quad \text{mit} \quad T_I = \frac{T_N}{K_{PR}}$$

$$y = K_{PR} \left(e + \frac{1}{T_N} \int e dt \right)$$

d) Frequenzgang**Aufgabe 4.8**

Gehe von der Formel im Zeitbereich aus und leite den komplexen Frequenzgang eines PI-Reglers her (mit K_{PR} und T_N).

Ergebnis:

$$\bar{F} = K_{PR} \left(1 + \frac{1}{j\omega T_N} \right)$$

e) Bodediagramm (näherungsweise)**Aufgabe 4.9**

Welche Näherungen gelten für \bar{F} bei sehr niedrigen bzw. sehr hohen Frequenzen?

Welches Verhalten ergibt sich daraus?

Was bedeutet das für Betrag und Phase von \bar{F} ?

Welche Näherungsgeraden gelten im Amplitudengang?

Wo schneiden sie sich?

Welche Phasenlage (genau) ergibt sich bei dieser Frequenz?

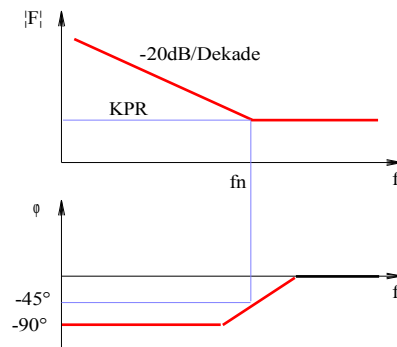
Welchen Wert hat der Betrag von \bar{F} dort (genau)? Wie kann man das in dB ausdrücken?

Ergebnisse:

Tiefe Frequenzen:	$\bar{F} \approx \frac{1}{j\omega T_I} \quad \text{I-Verhalten}$ $ \bar{F} \approx \frac{1}{\omega T_I} \quad \varphi \approx -90^\circ$ <p>-20dB/Dekade</p>
Hohe Frequenzen:	$\bar{F} \approx K_{PR} \quad \text{P-Verhalten}$ $ \bar{F} \approx K_{PR} \quad \varphi \approx 0$ <p>Horizontale bei K_{PR}</p>

Schnittpunkt der Näherungsgeraden bei $\omega_N = \frac{1}{T_N}$

Dort ist $|\bar{F}| = K_{PR} \cdot \sqrt{2}$ (d.h. +3dB gegenüber K_{PR}) und $\varphi = -45^\circ$

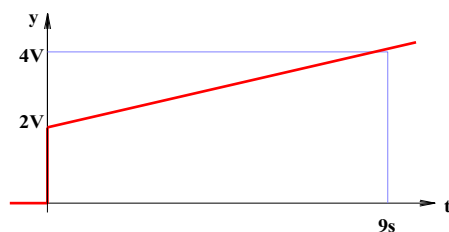


Aufgabe 4.10

Zeichne (näherungsweise) das Bodediagramm für das Beispiel aus Aufgabe 4.5

Aufgabe 4.11

Zeichne (näherungsweise) das Bodediagramm für einen Regler mit folgender Sprungantwort bei einem Eingangssprung von 1V.



f) Bodediagramm (exakt)

Aufgabe 4.12

Leite aus der Formel für \bar{F} die exakten Formeln für $|\bar{F}|$ und φ ab.

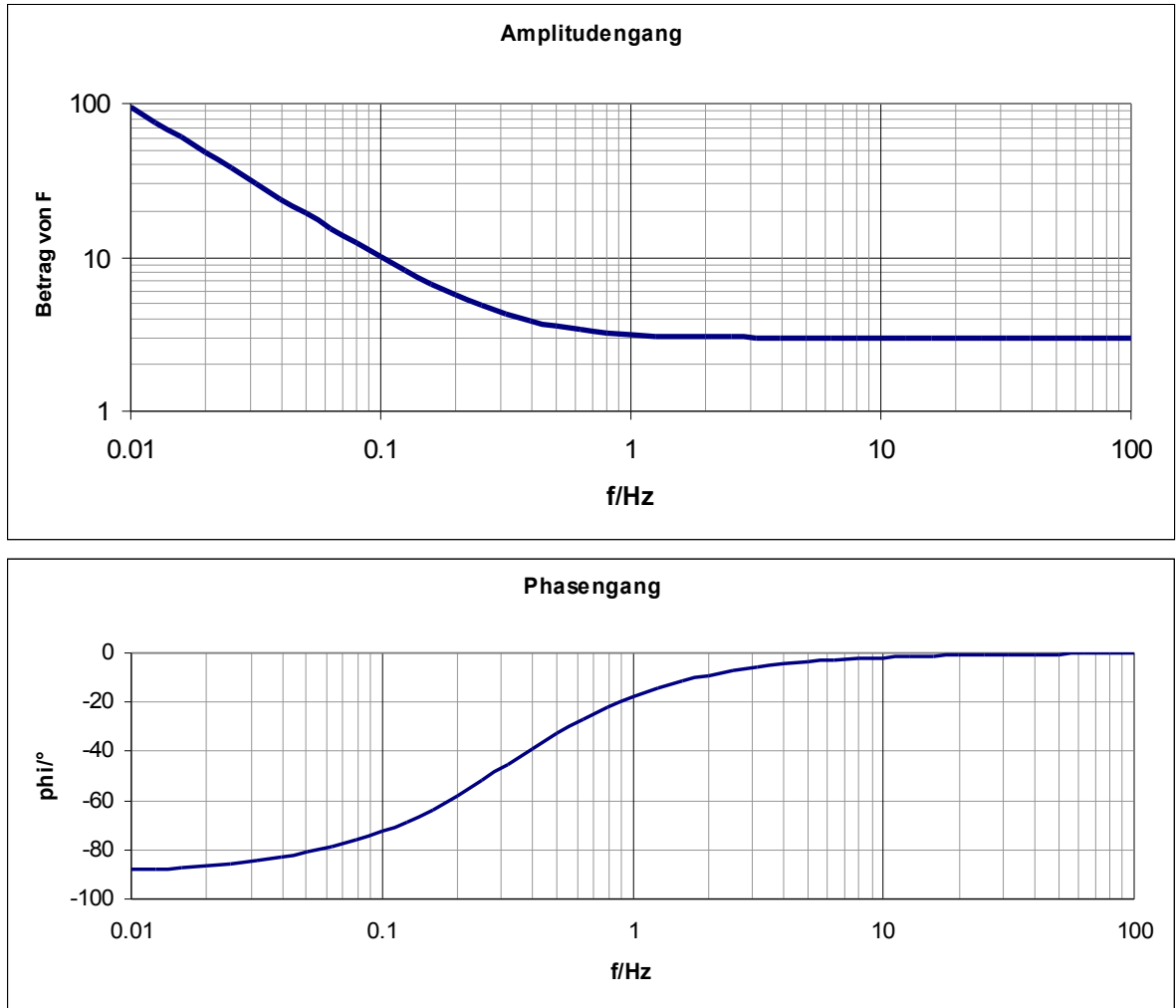
Mit diesen kann das Bodediagramm in einer Tabellenkalkulation gezeichnet werden.

Ergebnis:

$$|\bar{F}| = K_{PR} \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega T_N)^2}}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega T_N}\right)$$

Beispiel:



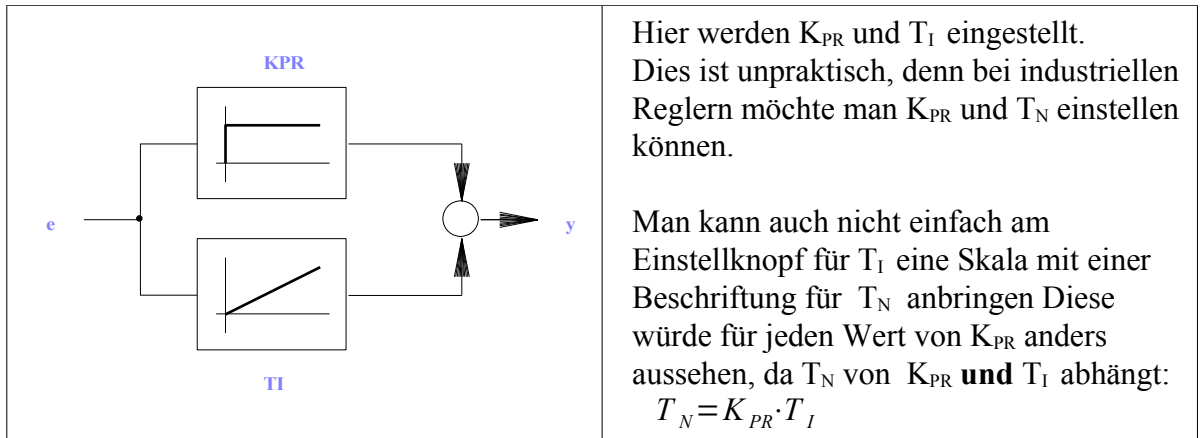
Aufgabe 4.13

Bestimme die Kennwerte des PI-Reglers mit obigem Bodediagramm.

g) Blockschaltbild eines industriellen PI-Reglers

Am naheliegendsten ist die **nicht interaktionsfreie Parallelstruktur**:

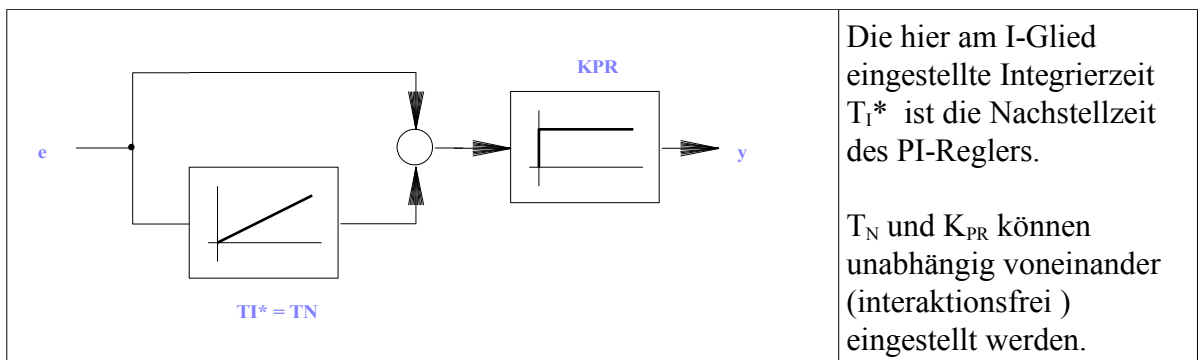
Dies ist nicht die praktisch verwendete Schaltung!



Aufgabe 4.14

Leite mit den Regeln für Blockschaltbilder den Frequenzgang dieser Schaltung her und forme ihn so um, dass er T_N enthält.

Die bei industriellen Reglern angewendete **interaktionsfreie Struktur** geht von der Frequenzgleichung mit T_N aus:

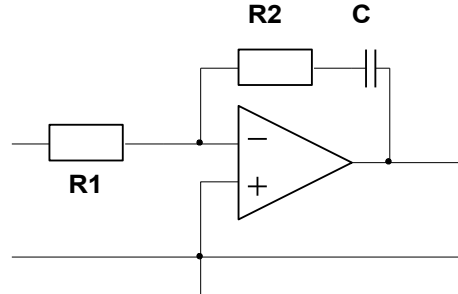


Aufgabe 4.15

Leite mit den Regeln für Blockschaltbilder den Frequenzgang dieser Schaltung her.

h) Invertierender PI-Regler mit OPV

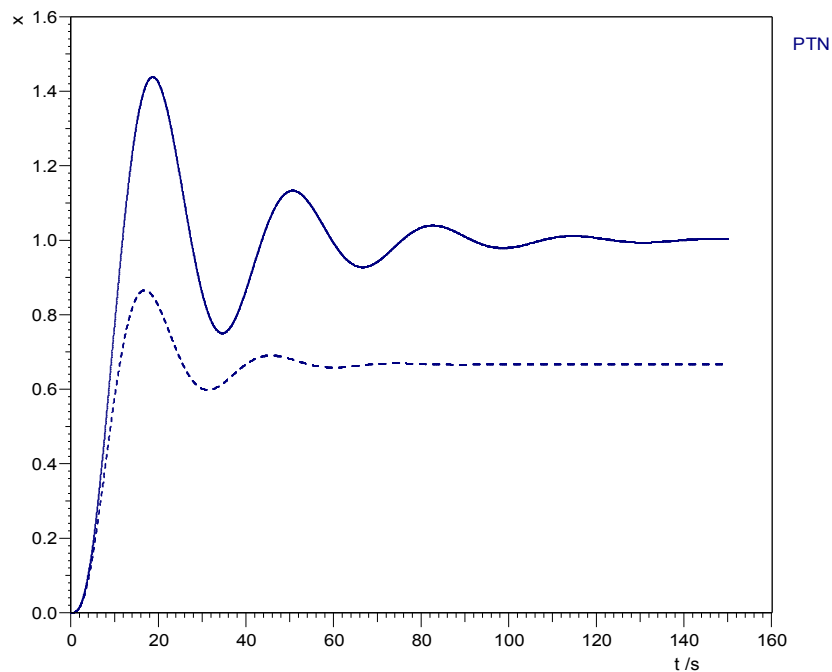
Diese Schaltung wird eher selten angewendet, da sie nicht interaktionsfrei ist. Sie kann aber wegen ihrer Einfachheit interessant sein, wenn T_N und K_{PR} nicht einstellbar sein müssen.



Aufgabe 4.16

Beweise mit der Methode der komplexen Impedanzen, dass die Schaltung PI-Verhalten hat. Bestimme die Parameter als Funktion der Bauteilwerte. Warum ist die Schaltung nicht interaktionsfrei?

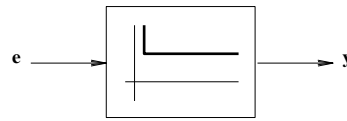
i) Beispiel für das dynamische Führungsverhalten



Aufgabe 4.17

Das Diagramm zeigt das Führungsverhalten eines Regelkreises, einmal mit P- und einmal mit PI-Regler. Welcher Sollwert war eingestellt? Welche Kurve gehört zum PI- und welche zum P-Regler?

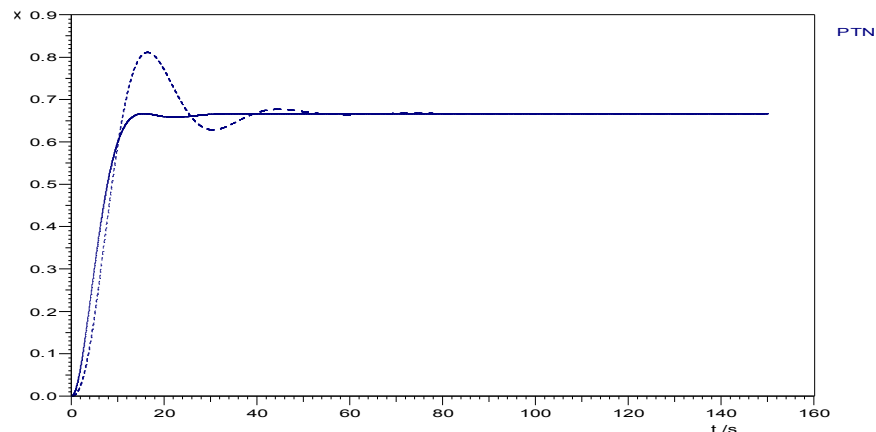
4.5 PD-Regler



a) Vorteile

- PD-Regler reagieren stark, wenn sich die Regelgröße plötzlich vom Sollwert entfernt
- Der D-Anteil hat eine stabilisierende Wirkung auf Regelkreise mit Strecken höherer Ordnung.
Richtig eingestellt ergibt sich mit D-Anteil weniger Überschwingen als bei einem reinen P-Regler.
Instabile Regelkreise können unter Umständen mit einem D-Anteil stabilisiert werden.

Beispiel: Führungsverhalten PT3, $T_s = 5s$ bei $w=1$



(gestrichelt: mit PD-Regler $K_{PR} = 2$,
durchgezogen mit PD-Regler $K_{PR} = 2$, $T_D = 5s$)

Nachteil: wie beim P-Regler gibt es eine bleibende Regelabweichung.

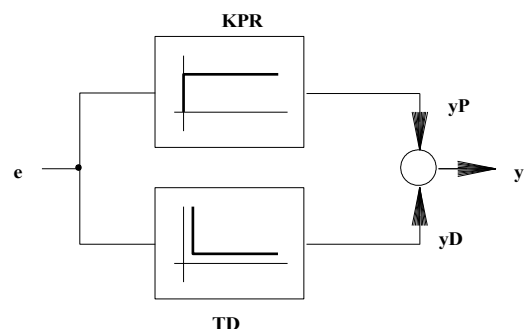
Praktisches Beispiel: Schwebende Kugel:

<http://staff.ltam.lu/feljc/school/asser/SchwebendeKugel1.pdf>

b) Gleichung im Zeitbereich (Prinzip)

$$y = y_P + y_D$$

$$y = K_{PR} \cdot e + T_D \cdot \frac{de}{dt}$$



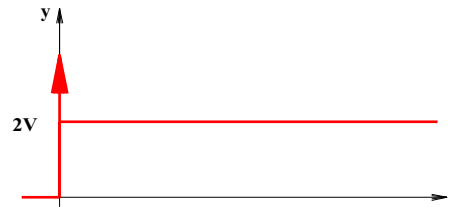
In der Praxis wird für das D-Glied ein DT1-Glied gewählt. Warum? (Siehe D0, DT1).

c) Sprungantwort

Wegen des D-Anteils ist die Sprungantwort wenig aussagekräftig.

Bei einem **PD-Regler mit reinem D0** würde im Moment des Sprungs (theoretisch!) am Ausgang ein Diracstoss erscheinen, danach würde das Eingangssignal mit dem Faktor K_{PR} verstärkt erscheinen.

Beispiel für $e = 1V$, $K_{PR} = 2$:



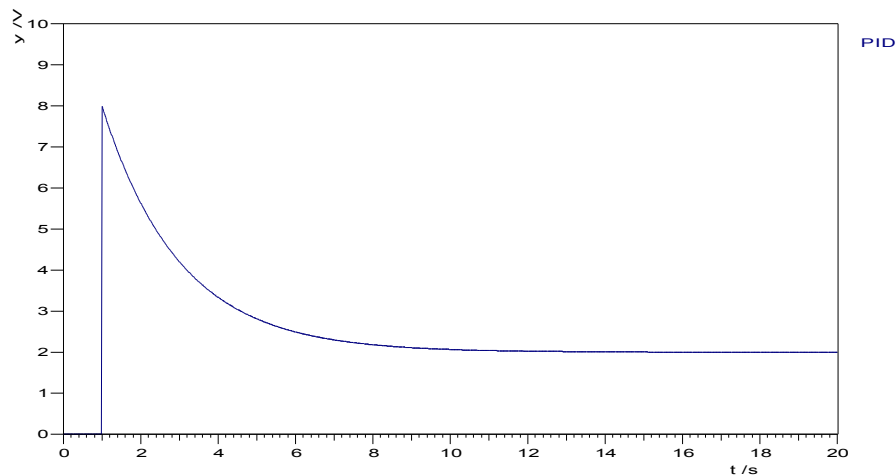
Von diesem Verhalten ist das Schaltzeichen abgeleitet.
Die Sprungantwort enthält keine Information über T_D !

Bei einem **PDT1-Regler**, wie er in der Praxis vorkommt, wird der Eingangssprung nicht unendlich hoch verstärkt, sondern nur mit der Vorhaltverstärkung V_D .

Aufgabe 4.18

Das folgende Diagramm zeigt die Sprungantwort eines PDT1-Reglers bei einem Eingangssprung von 1V zum Zeitpunkt $t=1s$.

Bestimme daraus K_{PR} , V_D und T_D .

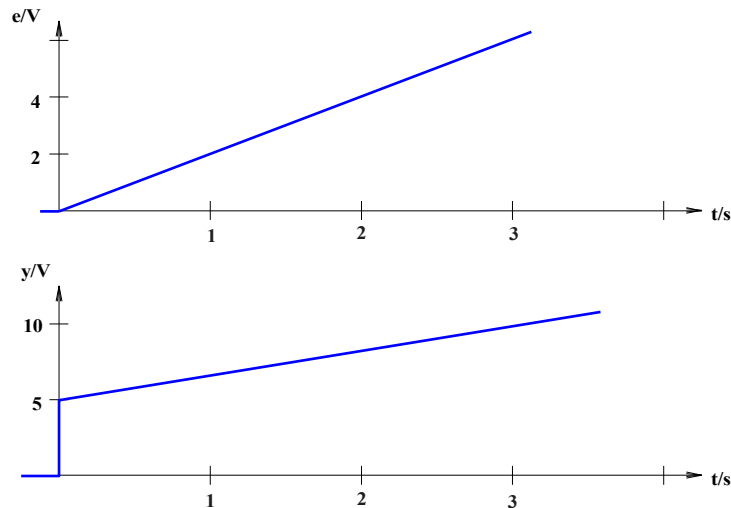


In der Praxis ist dieses Verfahren meist untauglich, da die Unsicherheiten bei der Messung des Spitzenwertes und der Zeitkonstanten zu fehlerbehafteten Werten für T_D führen.

d) Anstiegsantwort

Wegen des D-Anteils ist es sinnvoller, statt der Sprungantwort die Anstiegsantwort aufzunehmen.

Beispiel:



Aufpassen: die Anstiegsantwort ähnelt auf den ersten Blick der Sprungantwort des PI-Reglers, sie stellt aber etwas anderes dar!

Aufgabe 4.19

Zerlege die Kurve von y in P- und D-Anteil.

Bestimme daraus die Parameter K_{PR} und T_D des Reglers.

Aufgabe 4.20

Was würde sich am Diagramm ändern, wenn der Regler einen 1.5x so starken D-Anteil hätte?

e) Vorhaltezeit

Die Wirkung des D-Anteils wird durch T_D beschrieben.

Je größer T_D , desto stärker der D-Anteil.

Ähnlich wie beim PI-Regler benutzt man praktisch aber lieber eine Zeit, die es erlaubt, die Wirkung von P- und D-Anteil miteinander zu vergleichen, die Vorhaltezeit T_V .

Die Vorhaltezeit T_V ist die Zeit, die bei der Anstiegsantwort vergeht, bis der P-Anteil die gleiche Wirkung wie der D-Anteil hat.

Aufgabe 4.21

Zeichne T_V im Diagramm ein.

Aufgabe 4.22

Leite aus den Gleichungen für PD-Regler und Anstiegsfunktion und der Definition der Vorhaltezeit den Zusammenhang zwischen T_V , T_D und K_{PR} her.

Berechne T_V und vergleiche mit dem grafisch ermittelten Wert.

Ergebnis:
$$T_V = \frac{T_D}{K_{PR}}$$

f) Frequenzgang

Der Frequenzgang kann aus der Gleichung im Zeitbereich oder einfacher aus dem prinzipiellen Blockschaltbild hergeleitet werden:

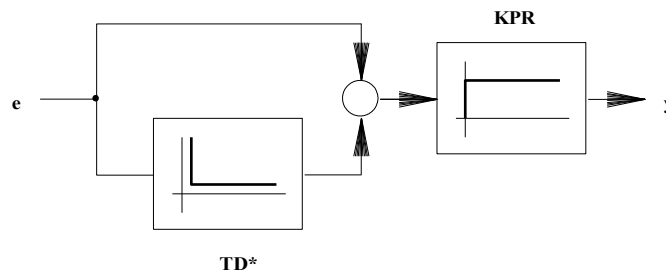
$$\bar{F} = K_{PR} + j \omega T_D$$

Da in der Praxis die Vorhaltezeit benutzt wird, ist es üblich, die Gleichung umzuformen.

Mit $T_V = \frac{T_D}{K_{PR}} \rightarrow T_D = T_V K_{PR}$ erhält man

$$\bar{F} = K_{PR}(1 + j \omega T_V)$$

g) Interaktionsfreie Blockschaltung:



In dieser Schaltung ist die einstellbare Differenzierzeit die Vorhaltezeit des Reglers. K_{PR} und T_V lassen sich interaktionsfrei einstellen.

h) Bodediagramm (näherungsweise)

$$\bar{F} = K_{PR}(1 + j \omega T_V)$$

für niedrige Frequenzen ergibt sich:

$$\bar{F} \approx K_{PR}$$

P-Verhalten

$$|\bar{F}| \approx K_{PR}$$

(horizontale Näherungsgerade im Amplitudengang)

$$\varphi \approx 0$$

für hohe Frequenzen ergibt sich:

$$\bar{F} \approx j \omega K_{PR} T_V = j \omega T_D$$

D-Verhalten

$$|\bar{F}| \approx \omega T_D$$

(+20dB/Dekade Näherungsgerade im Amplitudengang)

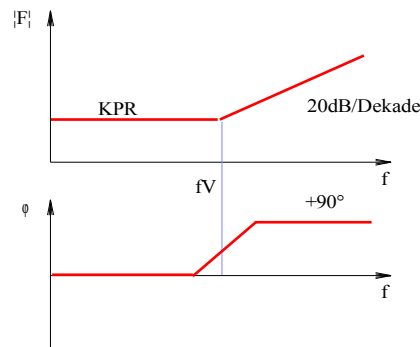
$$\varphi \approx +90^\circ$$

Der Schnittpunkt der Näherungsgeraden im Amplitudengang ergibt sich bei der Frequenz

$$K_{PR} = \omega T_D, \text{ also } \omega = \frac{K_{PR}}{T_D} = \frac{1}{T_V}$$

Ähnlich wie beim PI-Regler findet man für diese Frequenz einen Betragswert von $|\bar{F}| = K_{PR} \cdot \sqrt{2}$, also 3dB über dem Wert von K_{PR} .

Schematisch ergibt sich folgendes Bodediagramm:



Aufgabe 4.23

Überprüfe die Behauptung, dass der Wert von $|\bar{F}|$ bei $\omega_V = \frac{1}{T_V}$ 3dB über dem Wert von K_{PR} liegt.

Aufgabe 4.24

Zeichne das Bodediagramm des Reglers aus Aufgabe 4.19

h) Bodediagramm (exakt)

Aufgabe 4.25

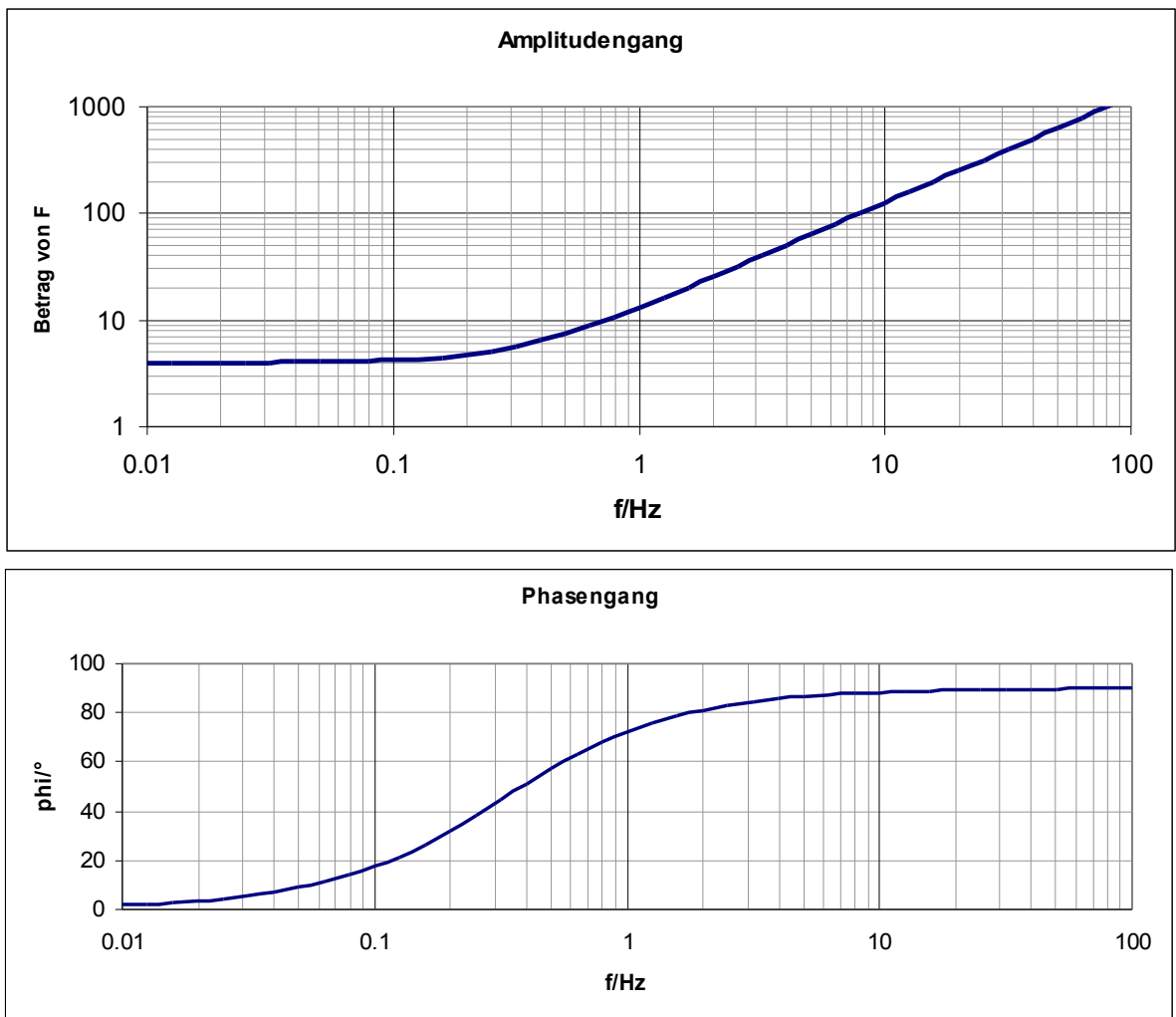
Leite die exakten Formeln zur Konstruktion des Bodediagramms aus dem Frequenzgang ab.

Ergebnisse:

$$|\bar{F}| = K_{PR} \sqrt{1 + (\omega T_V)^2}$$

$$\varphi = \arctan(\omega T_V)$$

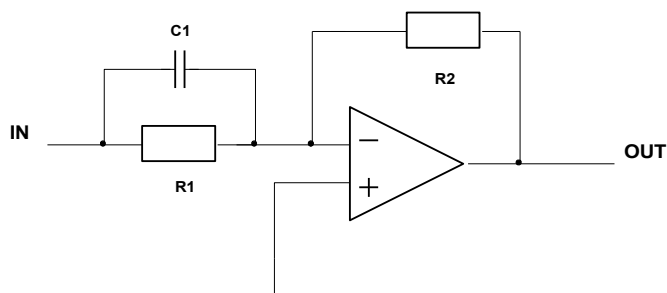
Beispiel:



Aufgabe 4.26

Bestimme die Reglerparameter aus dem Bodediagramm.

i) OPV-Schaltung

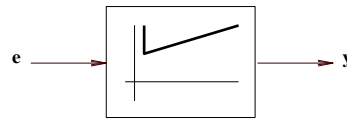


Aufgabe 4.27

Ist die gezeigte Schaltung ein PD-Regler?

Wovon hängen K_{PR} und T_V ab? Ist die Schaltung interaktionsfrei?

4.6 PID-Regler



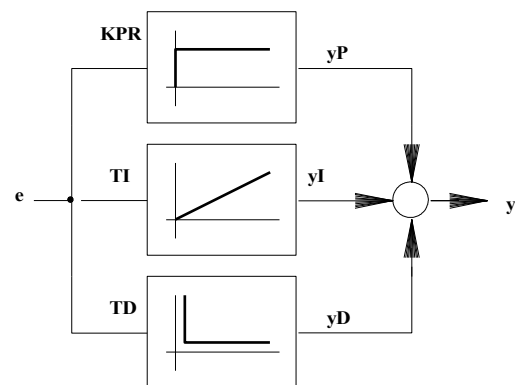
a) Vorteile

- der P-Anteil reagiert schnell
- der D-Anteil reagiert stark bei schnellen Änderungen der Regelgröße und hat eine stabilisierende Wirkung auf Regelkreise mit Strecken höherer Ordnung.
- Der I-Anteil sorgt dafür, dass es keine bleibende Regelabweichung gibt.

b) Gleichung im Zeitbereich (Prinzip)

$$y = y_P + y_I + y_D$$

$$y = K_{PR} \cdot e + \frac{1}{T_I} \int e \, dt + T_D \cdot \frac{de}{dt}$$



c) Frequenzgang

Dieser lässt sich direkt aus dem Prinzip-Blockschaltbild ermitteln:

$$\bar{F} = K_{PR} + \frac{1}{j\omega T_I} + j\omega T_D$$

Umgeformt mit den Beziehungen für T_N und T_V ergibt sich:

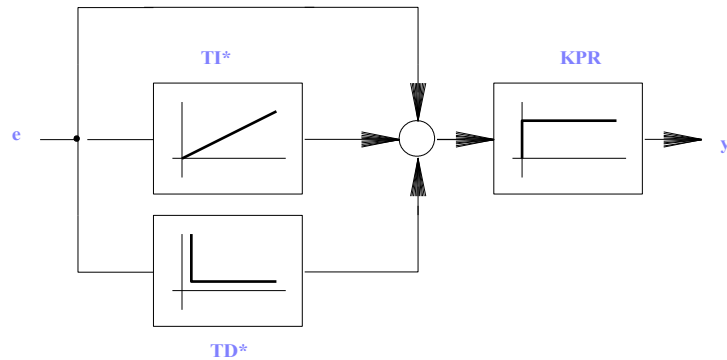
$$\bar{F} = K_{PR} \left(1 + \frac{1}{j\omega T_N} + j\omega T_V \right)$$

Aufgabe 4.28

Kontrolliere die Richtigkeit der obigen Formel.

d) Interaktionsfreie Blockschaltung

Aus der Formel für den Frequenzgang mit T_N und T_V ergibt sich die interaktionsfreie Blockschaltung, bei der K_{PR} , T_N und T_V unabhängig voneinander eingestellt werden können:



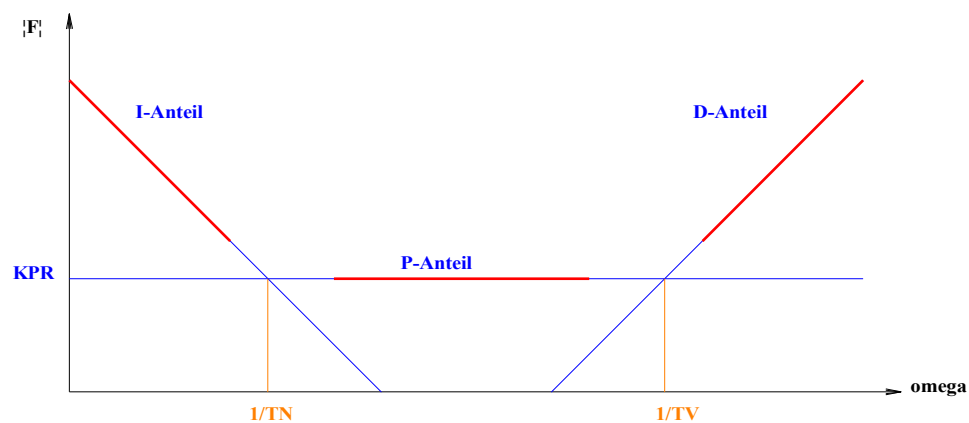
Achtung: hier ist $T_N = T_{I^*}$ und $T_V = T_{D^*}$

Diese Schaltung wird in Industrieregler verwendet.

e) Näherungen im Frequenzgang

Das Ausgangssignal setzt sich aus 3 Anteilen zusammen, von denen je nach Frequenz einer wesentlich stärker als die anderen ist. Die beiden schwächeren Anteile können dann näherungsweise vernachlässigt werden.

Welcher Anteil ausschlaggebend ist, sieht man sofort im Amplitudengang:



Wenn die Frequenzen $\omega_N = \frac{1}{T_N}$ und $\omega_V = \frac{1}{T_V}$ weit genug auseinander liegen, stellen die rot gezeichneten Kurvenstücke einigermaßen gute Näherungen dar (man beachte den logarithmischen Maßstab).

In der Praxis ist diese Bedingung aber nicht immer gegeben, sodass das flache Stück mit P-Verhalten mehr oder weniger stark in I- und D-Richtung „verbogen“ wird. Eventuell ergibt sich nur eine „Spitze“ bis zum Wert des P-Anteils.

In diesem Fall kommt man um eine exakte Berechnung nicht herum.

Aufgabe 4.29

Gebe Näherungen für \bar{F} , $|\bar{F}|$, φ für tiefe, mittlere und hohe Frequenzen an.

f) Exaktes Bodediagramm**Aufgabe 4.30**

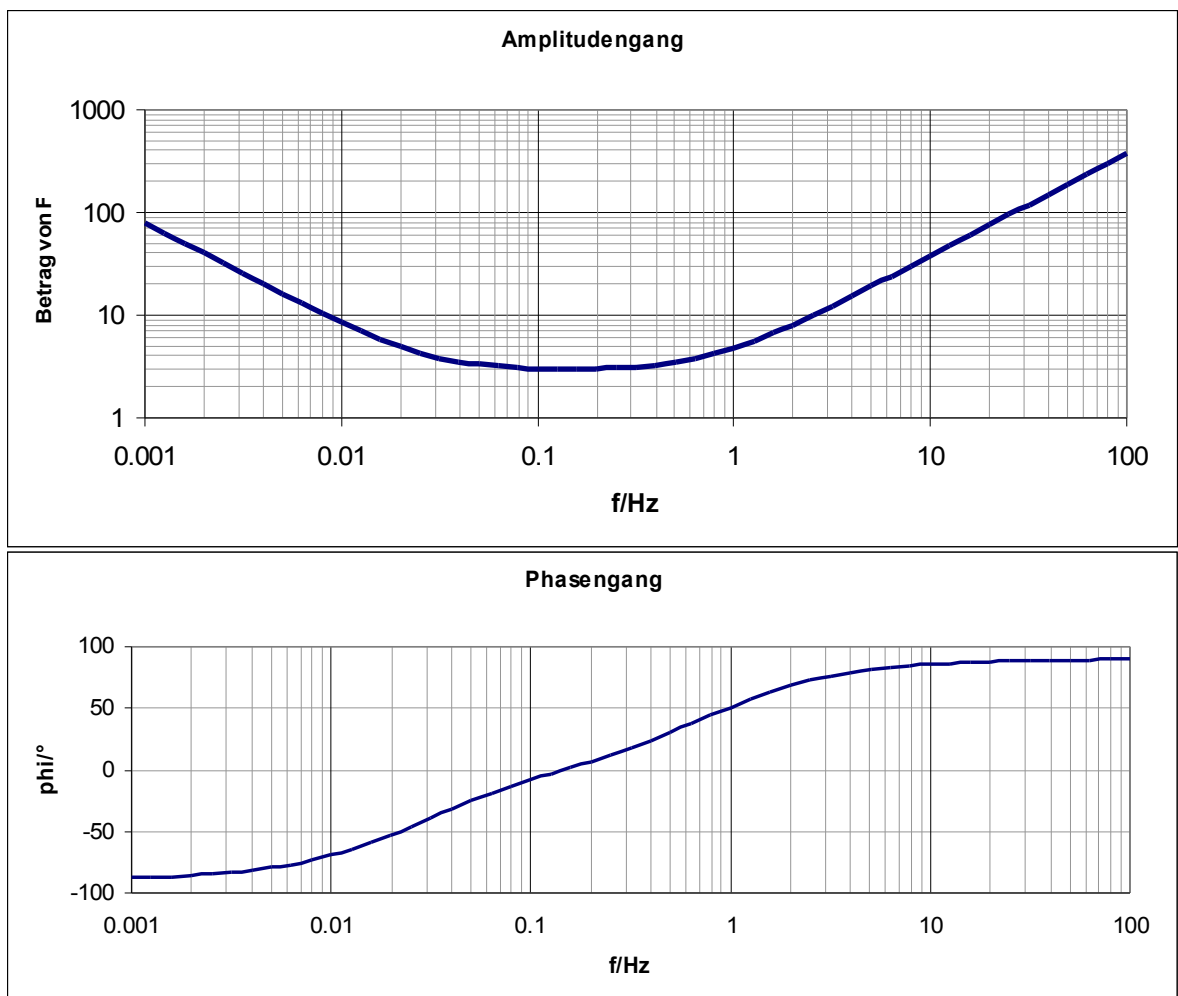
Leite aus der Frequenzgang-Gleichung die Formeln zum Zeichnen des exakten Bodediagramms her.

Ergebnis:

$$|\bar{F}| = K_{PR} \sqrt{1 + \left(\omega T_V - \frac{1}{\omega T_N} \right)^2}$$

$$\varphi = \arctan \left(\omega T_V - \frac{1}{\omega T_N} \right)$$

Beispiel für ein Bodediagramm:

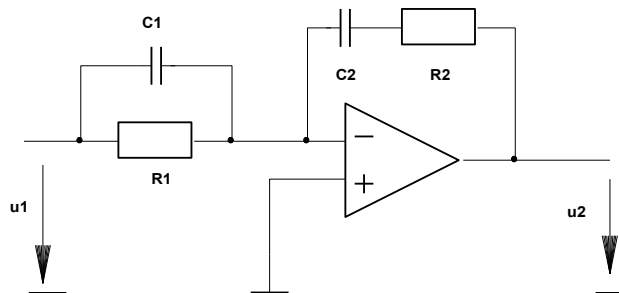


Aufgabe 4.31

Bestimme die Parameter des Reglers aus dem obigen Bodediagramm.

g) OPV-Schaltungen

Beispiel 1

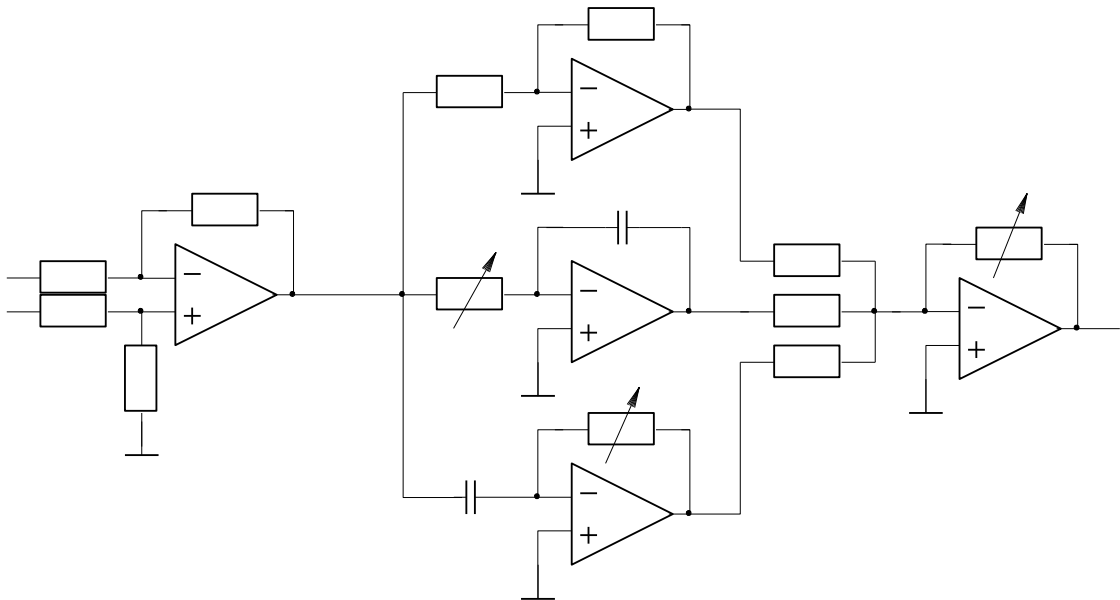


Diese Schaltung ist nur in seltenen Fällen (bei festen Parametern) anwendbar, da sie nicht interaktionsfrei ist.

Aufgabe 4.32

Beweise, dass die Schaltung PID-Verhalten hat und gib Formeln zur Berechnung der Parameter an.

Beispiel 2: Interaktionsfreie Schaltung

**Aufgabe 4.33**

Analysiere die Schaltung.

Beschrifte Ein- und Ausgänge, die Signale innerhalb der Schaltung und die Funktion der Potentiometer.

Zeichne ein Blockschaltbild der Schaltung.