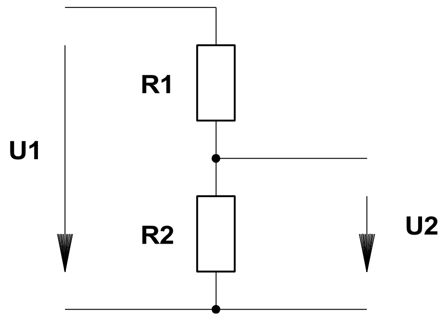
# Frequenzganganalyse, Teil 2: P-, I- und D - Glieder

## 2.1 P0-Glieder

P0: P-Glied ohne Verzögerung
P-Glied nullter Ordnung

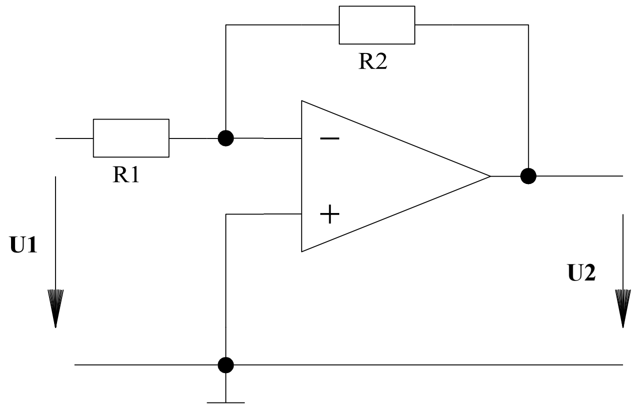
**Aufgabe 2.1:**
Bestimme den Proportionalbeiwert und den Frequenzgang der folgenden Schaltungen.
Zeichne die Bode-Diagramme dazu.

Beispiel 1




R1 = 10kΩ
R2 = 20kΩ

Beispiel 2




R1 = 22kΩ
R2 = 47kΩ

## 2.2 I-Glieder

Integrierglieder

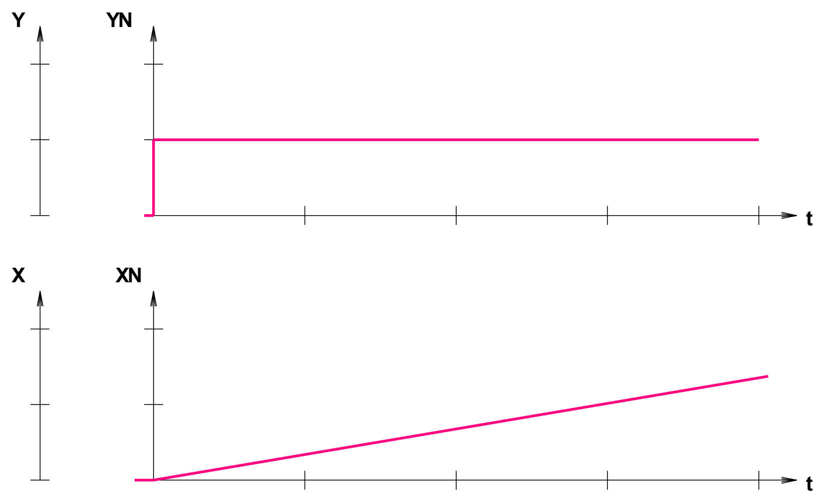
### a) Wiederholung: Sprungantwort

**Beispiel:**
Füllstandsbehälter mit einer Grundfläche von $1m^2$ und einer Höhe von 2m.

Stellgröße Y:
Steuerspannung des Magnetventils für den Zufluss (0...10V, 10V entspricht 100%).
Bei 100% Stellgröße beträgt der Zufluss 4l/s

Regelgröße X:
Füllstand in cm (0....200cm, 200cm entspricht 100%)

Sprungantwort für einen 5V-Sprung:




**Aufgabe 2.2:**
a) Ergänze die Beschriftung der Diagramme (konkrete Werte!).
b) Zeichne die Kurven für einen Stellgrößensprung von 100% ein.

## b) Gleichung im Zeitbereich

Allgemein, mit $x_e$ = Eingangsgröße, $x_a$ = Ausgangsgröße:

$$x_a = K_I \cdot \int x_e \, dt \qquad K_I = \text{Integrationskonstante}$$

Dies kann man auch in differentieller Schreibweise ausdrücken:

$$\frac{dx_a}{dt} = K_I \cdot x_e$$

Die Änderung pro Zeit der Ausgangsgröße ist proportional zum Wert des Eingangsignals.

Hieraus sieht man, dass $x_a$ seinen vorherigen Wert behält, wenn das Eingangssignal null ist.

## c) Integrierzeit

In der Praxis kann man sich unter der Integrationskonstanten wenig vorstellen, deswegen wird viel öfter der Begriff der Integrierzeit $T_I$ verwendet.

Die Integrierzeit ist bei der Sprungantwort die Zeit, die vom Ausgangssignal benötigt wird, um sich genauso viel zu ändern wie das Eingangssignal.

Diese Definition ist problematisch, wenn Eingangs- und Ausgangsgröße unterschiedlicher Art sind, wie im obigen Beispiel. Das Problem besteht nicht, wenn wir bei der Definition normierte Größen verwenden.

Im folgenden gehen wir stillschweigend davon aus, dass es sich bei $x_e$ und $x_a$ um gleichartige oder um normierte Signale handelt.

**Aufgabe 2.3:**
a)Wie ist die Beziehung zwischen $T_I$ und $K_I$ ? (normierte Signale vorausgesetzt)
b) Bestimme beide Konstanten für das Beispiel.
b) Wie lautet die Gleichung des I-Gliedes mit $T_I$ statt $K_I$ ?

Ergebnisse:

$$K_I = \frac{1}{T_I} \qquad \text{für normierte Eingangs- und Ausgangssignale}$$

$$x_a = \frac{1}{T_I} \cdot \int x_e \, dt \qquad \text{für normierte Eingangs- und Ausgangssignale}$$

## d) Frequenzgang des I-Gliedes

Im Zeitbereich:

am Eingang liegt ein Sinussignal $x_e = E \cdot \sin(\omega t)$

das Ausgangssignal berechnet sich als $x_a = \frac{1}{T_I} \cdot \int x_e dt$

$$x_a = \frac{1}{T_I} \cdot \int E \cdot \sin(\omega t) dt$$

Zur Bestimmung des Frequenzgangs werden die Sinusspannungen am Eingang und am Ausgang als komplexe (rotierende) Zeiger dargestellt:

Eingangssignal: $\bar{x}_e = E \cdot e^{j\omega t}$

Ausgangssignal: $\bar{x}_a = \frac{1}{T_I} \cdot \int \bar{x}_e dt$

Wir setzen $\bar{x}_e$ ein : $\bar{x}_a = \frac{1}{T_I} \cdot \int E \cdot e^{j\omega t} dt$

$$\bar{x}_a = \frac{E}{T_I} \cdot \int e^{j\omega t} dt$$

Das Integral ist von der Form $\int e^{ax} dx$ , mit x = t und $a = j\omega$

In einer Integraltabelle findet man als Lösung $\frac{1}{a} \cdot e^{ax}$ , hier also $\frac{1}{j\omega} \cdot e^{j\omega t}$ .

Dies eingesetzt ergibt für das komplexe Ausgangssignal:

$$\bar{x}_a = \frac{E}{j\omega T_I} \cdot e^{j\omega t}$$

Darin erkennt man das Eingangssignal $\bar{x}_e = E \cdot e^{j\omega t}$ ,

es ist also

$$\bar{x}_a = \frac{1}{j\omega T_I} \cdot \bar{x}_e$$

Mit der Definition des Frequenzgangs $\bar{F} = \frac{\bar{x}_a}{\bar{x}_e}$ erhält man das Ergebnis:

$$\boxed{\bar{F} = \frac{1}{j\omega T_I}}$$ (nicht invertierendes I-Glied)

## e) Bodediagramm des I-Gliedes

**Aufgabe 2.4:**
Was erwartet man intuitiv für das Frequenzverhalten eines I-Gliedes (Beispiel: Wasserbehälter)?
Könnte das durch die obige Formel bestätigt werden?

Zum Zeichnen des Bodediagramms brauchen wir den **Betrag von $\bar{F}$** (die Verstärkung) und die **Phasenverschiebung**.

Wir müssen diese Information aus der Gleichung für $\bar{F}$ gewinnen:

$$\bar{F} = \frac{1}{j\omega T_I}$$

Da j eine Länge von 1 hat, ist für den **Betrag** sofort klar:

$$\boxed{|\bar{F}| = \frac{1}{\omega T_I}}$$

Man sieht, dass die Verstärkung umgekehrt proportional zur Frequenz abnimmt. In einem linearen Diagramm von $|\bar{F}|$ als Funktion der Frequenz würde dies eine Hyperbel ergeben.

Im Bodediagramm wird aber eine doppelt logarithmische Darstellung gewählt.

Wie man leicht sieht, wird z.B. $|\bar{F}|$ 10x kleiner, wenn die Frequenz 10x größer wird, und 100x kleiner, wenn die Frequenz 100x größer wird.
Dies entspricht im logarithmischen Maßstab einer fallenden Geraden.

In dB ausgedrückt bedeutet ein Faktor 10 eine Änderung um 20dB.

**Beim I-Glied ist der Amplitudengang eine mit 20dB pro Dekade fallende Gerade.**

Da die Steigung bekannt ist, brauchen wir 1 Punkt, um diese zu zeichnen.

Am einfachsten sucht man den Punkt mit $|\bar{F}| = 1$:

$$|\bar{F}| = \frac{1}{\omega T_I} = 1 \;\rightarrow\; \omega_I = \frac{1}{T_I}$$

Durch diesen Punkt legt man dann eine mit 20dB pro Dekade fallende Gerade.

Um die Phasenverschiebung zu erhalten, müssen wir $\bar{F}$ in Real- und Imaginärteil zerlegen, also $\bar{F}$ = Re + j Im.

Das j muss unter dem Bruchstrich verschwinden, das geht mit einem kleinen Trick:

$$\overline{F} = \frac{1}{j\omega T_I} \cdot \frac{j}{j}$$

$$\overline{F} = j \cdot \frac{-1}{\omega T_I}$$

$\overline{F}$ besteht nur aus einem negativen Imaginärteil, der Realteil ist null.

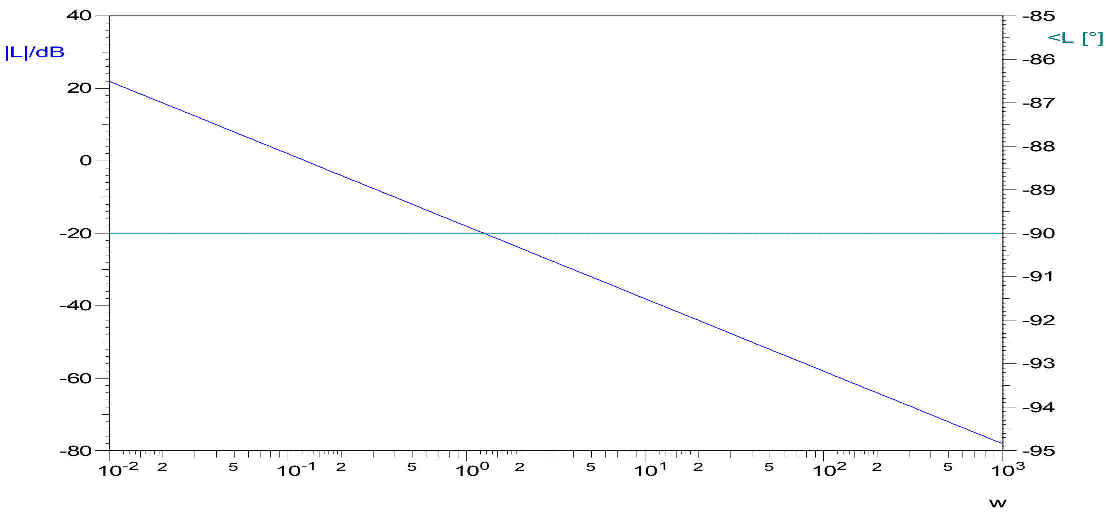
$\overline{F}$ ist ein senkrecht nach unten zeigender Zeiger, dessen Länge frequenzabhängig ist. (Umso länger, je kleiner die Frequenz)

**Der Phasenwinkel ist für alle Frequenzen -90°.**

Das Ausgangssignal eilt dem Eingangssignal um 90° nach.

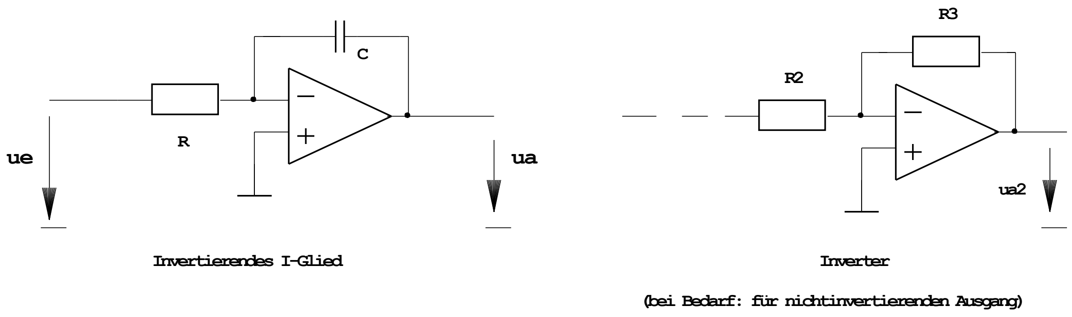
**Aufgabe 2.5:**
Zeichne für ein I-Glied mit $T_I$ = 5s das Bodediagramm
a) mit $|\overline{F}|$ in Zehnerpotenzen und der Kreisfrequenz
b) mit $|\overline{F}|$ in dB und der Frequenz.

**Aufgabe 2.6:**
Bestimme für das untenstehende Bodediagramm den charakteristischen Parameter der Strecke. (Hier bedeutet w = ω in der BORIS-Beschriftung.)
Bei welcher Frequenz ist die Ausgangsspannung betragsmäßig gleich der Eingangs-spannung?




**Aufgabe 2.7:**
Was würde sich am obigen Diagramm ändern, wenn die Strecke invertiert?

## f) Elektronisches I-Glied (invertierend)




**Aufgabe 2.8:**
Überlege qualitativ, wie sich die Gegenkopplung und damit auch die Verstärkung ändern, bei hohen und bei tiefen Frequenzen.
Passt das zum I-Verhalten?

**Aufgabe 2.9:**
Bestimme mit der Methode der komplexen Impedanzen den Frequenzgang $\overline{F}$ des invertierenden I-Gliedes.
Welche Formel ergibt sich für die Integrierzeit?

Ergebnis:

$$\overline{F} = -\frac{1}{j\omega RC}$$

$$T_I = RC$$

**Aufgabe 2.10:**
Zeichne das Bodediagramm eines invertierenden I-Gliedes mit R = 1MΩ und C=470nF.

## 2.3 D – Glieder

D0-Glieder, Differenzierglieder

### a) Gleichung im Zeitbereich

$$\boxed{x_a = T_D \cdot \frac{dx_e}{dt}}$$

Die Ausgangsgröße ist proportional zur Änderungsgeschwindigkeit der Eingangsgröße.

Der charakteristische Parameter des D0-Gliedes ist die **Differenzierzeit $T_D$** .

### b) Frequenzgang

**Aufgabe 2.11**
Leite, ausgehend von der Gleichung im Zeitbereich, die Gleichung für den Frequenzgang $\bar{F}$ her.
Vorgehensweise: Gleichung im Zeitbereich → komplexe Zeiger → $\bar{F}$

Hinweis: $\frac{d}{dx}(e^{ax}) = a \cdot e^{ax}$

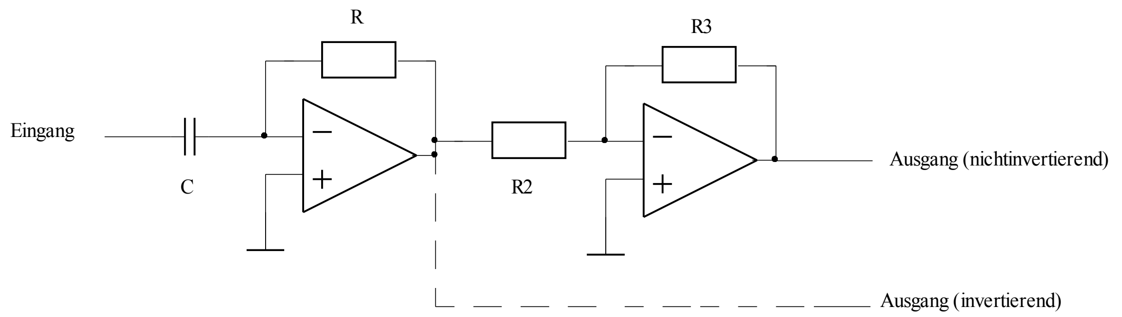
Ergebnis:

$$\boxed{\bar{F} = j\omega T_D}$$

**Aufgabe 2.12**
Was sagt die Formel für $\bar{F}$ uns

- über die Lage von $\bar{F}$ in der komplexen Ebene?
- Über das Frequenzverhalten?
  (z.B. Was passiert wenn die Frequenz um eine Dekade erhöht wird?)

### c) Schaltung




Beispiel: R = 1MΩ, C = 3.3µF, R2 = 100kΩ, R3 = 100kΩ.

Braucht man ein invertierendes D-Glied, genügt der linke Teil der Schaltung.
Für ein nicht invertierendes D0 ergänzt man mit einem Inverter.

**Aufgabe 2.13**
a) Leite $\bar{F}$ her für ein nichtinvertierendes D0-Glied.
Bestimme den charakteristischen Parameter der obigen Schaltung.
b) Was ändert sich am Frequenzgang der Schaltung, wenn der Wert von R3 verdoppelt wird? (Handelt es sich immer noch um ein D0-Glied? Mit welchem/welchen Parameter(n) ?

## d) Bodediagramm

**Aufgabe 2.14**
a) Bestimme die Formeln für den Betrag und die Phase von $\bar{F}$

b) Wie ändert sich der Betrag von $\bar{F}$ über eine Dekade?
Welche Kurve ergibt sich für $|\bar{F}|$ im Amplitudengang?

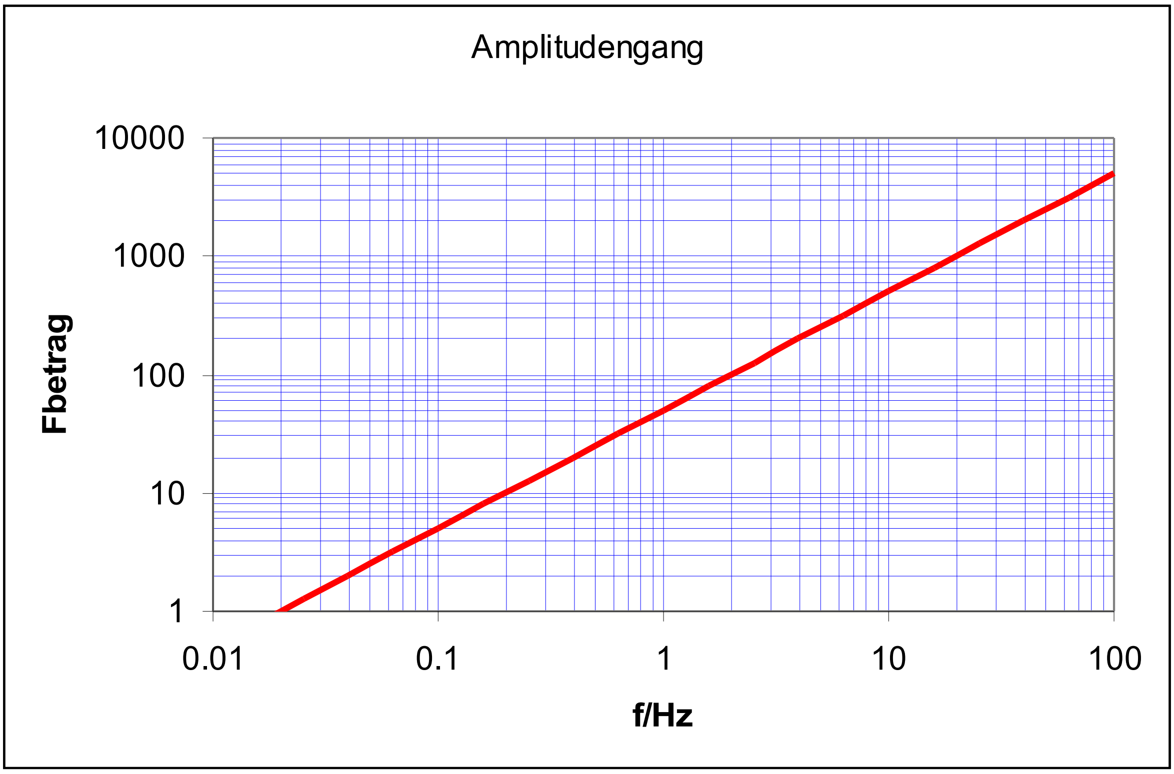
c) Zeichne das Bodediagramm für die obige Schaltung.
Hinweis: Frequenz $\omega_D$ für $|\bar{F}|=1$ berechnen.

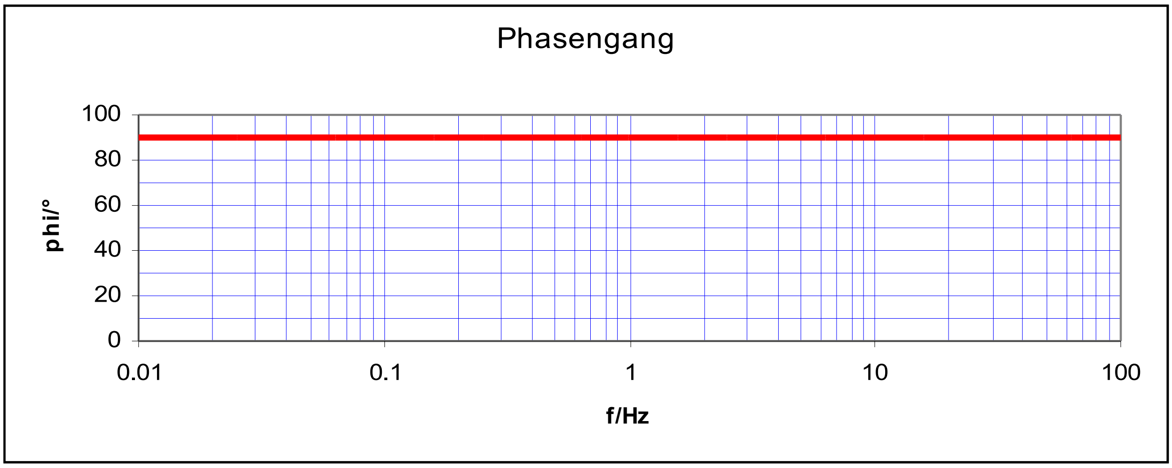
**Ergebnisse für das D0-Glied:**

- $|\bar{F}|=\omega T_D$
- $\varphi=+90°$ **(das Ausgangssignal ist bei allen Frequenzen 90° voreilend)**
- **Der Amplitudengang ist eine mit +20dB pro Dekade ansteigende Gerade.**

**Aufgabe 2.15**
Bestimme den charakteristischen Parameter für das untenstehende Bodediagramm.
Mit welchen Bauelementen (Werte angeben!) könnte dieses D0-Glied realisiert werden?

Beispiel:




**Tipp:**
Um in EXCEL / OpenCalc eine logarithmische Verteilung der Frequenzwerte z.B. von 0.01 bis 100 zu bekommen, ist es hilfreich, eine zusätzliche Spalte mit den Exponenten der Zehnerpotenzen zu benutzen. Diese lässt man dann linear ansteigen.

| | f/Hz | ?[1/s] | Fbetrag | phi/° |
|---|---|---|---|---|
| -2 | 0.01 | 0.062832 | 0.502655 | 90 |
| -1.8 | 0.015849 | 0.099582 | 0.796654 | 90 |
| -1.6 | 0.025119 | 0.157826 | 1.262612 | 90 |
| -1.4 | 0.039811 | 0.250138 | 2.001105 | 90 |
| -1.2 | 0.063096 | 0.396442 | 3.171538 | 90 |

## e) Zeitverhalten (Wiederholung)

**Sprungantwort:**

Die Sprungantwort des D0-Gliedes bringt keine verwertbare Information.

Da die Ausgangsgröße $x_a = T_D \cdot \frac{dx_e}{dt}$ proportional zur Änderungsgeschwindigkeit des Eingangssignals ist, ergibt sich bei einem idealen Sprung am Eingang für t=0 theoretisch der Wert unendlich für das Ausgangssignal. Danach ist $x_a$ =0, da sich $x_e$ nicht mehr ändert.

$x_a$ ist theoretisch ein Diracstoss.

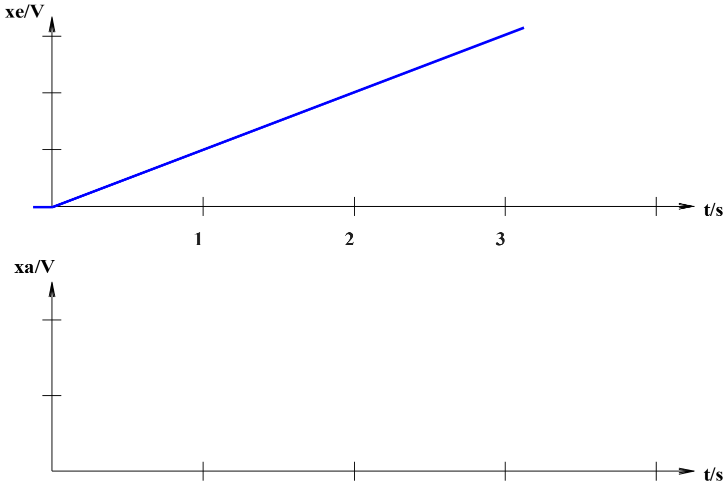
In der Praxis wird das Ausgangssignal begrenzt, durch unvermeidbare Trägheitseffekte in der Schaltung (Slewrate von OPVs, parasitäre Kapazitäten, Übersteuerung usw.)

So oder so, mit der Sprungantwort ist nichts anzufangen, denn man kann den charakteristischen Parameter, die Differenzierzeit, damit nicht bestimmen.

**Anstiegsantwort**

Wird am Eingang ein Signal mit konstanter Anstiegsgeschwindigkeit angelegt, sieht die Sache anders aus.

**Aufgabe 2.16**
Bestimme das Ausgangssignal für ein D-Glied mit $T_D$ = 2s.




## f) Probleme bei der Anwendung eines D0-Gliedes in einem Regler

Das D0-Glied hat für hohe Frequenzen eine sehr hohe Verstärkung.
In der Praxis gibt es aber immer hochfrequente Störsignale (Funksignale, Rauschen in der Schaltung, usw.). Diese würden hoch verstärkt werden und könnten im Extremfall sogar zur Übersteuerung des D0 führen. Unter Umständen würde das Stellglied dauernd öffnen und schließen, nur aufgrund dieses Effektes.
Um das zu vermeiden begrenzt man in der Praxis die Verstärkung für hohe Frequenzen auf einen unschädlichen Wert → DT1 – Glied.