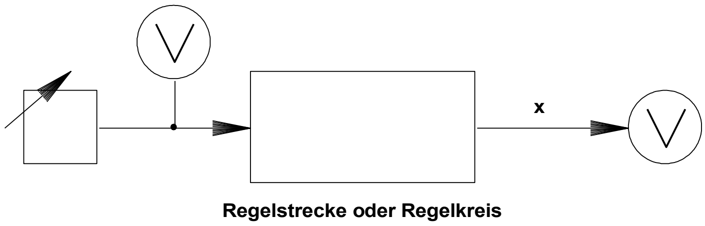
Frequenzganganalyse, Teil 1: Grundlagen

1. Einführung

Bei der Untersuchung einer Regelstrecke oder eines Regelkreises können unterschiedliche Sichtweisen wichtig sein:

- **Statisches Verhalten:**



Wie genau wird ein Sollwert eingehalten?
Wie gut wird eine Störung ausgeregelt?
Beim statischen Verhalten interessieren die Endwerte, wenn man dem Regelkreis genügend Zeit gibt um diese (näherungsweise) zu erreichen.

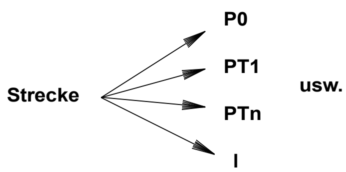
- **Dynamisches Zeitverhalten:**

Wie reagiert die Strecke oder der Regelkreis auf eine Änderung des Sollwertes oder der Störgröße?

Gibt es Überschwingen oder sogar Instabilität?

Wie lange dauert es (näherungsweise) bis sich ein stabiler Endwert eingestellt hat?

Eine besondere Bedeutung hat die Aufnahme der **Sprungantwort**.
Anhand dieser kann man Regelstrecken in verschiedene Kategorien einteilen und so etwas über ihr Verhalten im Regelkreis voraussagen, unabhängig davon wie sie konkret aufgebaut sind (elektronisch, mechanisch ...).



- **Frequenzverhalten:**

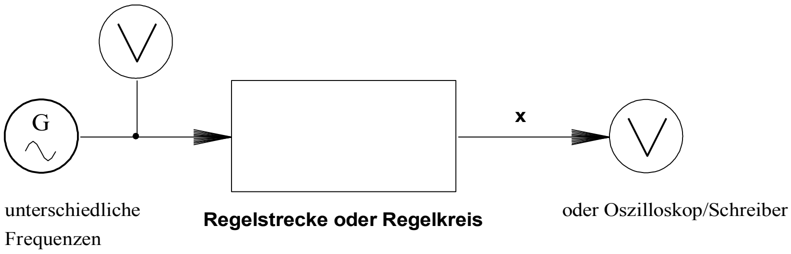


Tabelle Messwerte

f/Hz	x	phi
1	2V	0°
10	1.78V	12°
....	.....	....

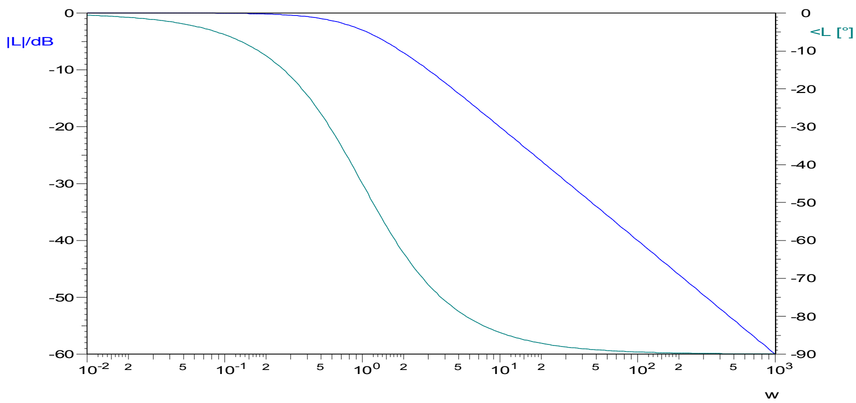
→ **Rechnen:** **Verstärkung** **x/y** → **Diagramme zeichnen:** **Amplitudengang (Verstärkung)** **Phasengang** **als Funktion der Frequenz**

Man untersucht das Verhalten der Strecke oder des Regelkreises bei unterschiedlichen Frequenzen (Eingangsamplitude konstant).
Dabei werden die Amplituden von Eingangs- und Ausgangssignal, und die Phasenlage gemessen.

Aus den Amplituden der Signale wird die Verstärkung berechnet.

Anschließend werden die Diagramme von Amplitudengang (Verstärkung) und Phasengang als Funktion der Frequenz gezeichnet.

Dieses Diagramm heißt Bodediagramm.



Aus dem Verlauf des Bodediagramms kann man (wie aus der Sprungantwort) etwas über das Verhalten sagen und eine Kategorisierung vornehmen: P0 / PT1 / Ptn ...

Tipp: In BORIS erhält man das Bodediagramm eines Blocks durch einen Rechtsklick mit der Maus.
Dabei ist die Verstärkung in dB angegeben, das w auf der horizontalen Achse bedeutet eigentlich ω = 2πf, die Kreisfrequenz.

2. Anwendung der Frequenzganganalyse

a) Messtechnische Anwendung

Die Methode ist in der praktischen Regelungstechnik sehr oft nicht oder nur schwierig anzuwenden, vor allem bei sehr „langsamen“ und/oder nicht elektrischen Strecken.
Beispiele dafür : Füllstandsbehälter, Öfen ......

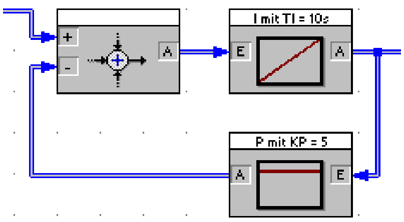
Es gibt aber sehr wichtige Anwendungen in der Schwingungsanalyse.
Beispiele:
Welche Resonanzfrequenz hat eine Brücke? Mit welcher Trittfrequenz sollte eine Armeekolonne besser nicht darüber marschieren?
Wann fängt ein Teil einer Maschine an zu vibrieren?

In der Nachrichtentechnik und Audiotechnik hat die Methode eine enorme Bedeutung.
Beispiele:
Beim Radioempfänger muss die Frequenz der zu empfangenden Station aus allen anderen herausgefiltert werden. Wie gut macht ein Filter das? Was geschieht mit den Nebenstationen?
Eine Lautsprecherbox soll das Audiosignal möglichst unverzerrt wiedergeben, für alle hörbaren Frequenzen (d.h. ca. 20Hz...20kHz).

b) Theoretische Anwendung (Theorie für die Praxis!)

Ein Regelkreis kann aus einer sehr komplexen Zusammenschaltung unterschiedlicher Blöcke bestehen.
Wie wird er sich verhalten?
Wird die Anlage stabil arbeiten oder wilde Schwingungen ausführen?
Wie lange wird es dauern bis ein stabiler Arbeitspunkt erreicht wird?
Hat die Anlage als Ganzes eventuell ein einfach zu beschreibendes Verhalten (PT1, PTn, I)?
Auf diese und ähnliche Fragen kann man antworten, wenn man die Frequenzgang-Methode beherrscht und die einzelnen Blöcke kennt.

Beispiel:
Welches Verhalten hat diese Schaltung?



Durch Simulieren findet man die Antwort.
Die ganze Schaltung kann durch einen einzigen Block dargestellt werden. Welchen?

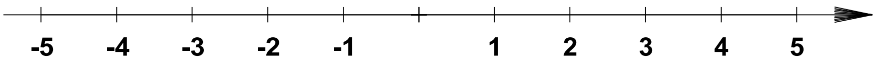
Die gleiche Antwort kann man aber auch ohne Computer, rein rechnerisch, durch Anwenden der Frequenzgangmethode finden. Außerdem erlaubt die Methode, die Parameter des Ersatzblocks exakt zu berechnen.

Eine weitere spannende Anwendung ist die Frage, ob man die Trägheit einer Strecke oder eines Sensors irgendwie elektronisch wegkompensieren kann. Ja, man kann (in Grenzen)!

3. Wiederholung: Komplexe Zahlen

a) Reelle Zahlen

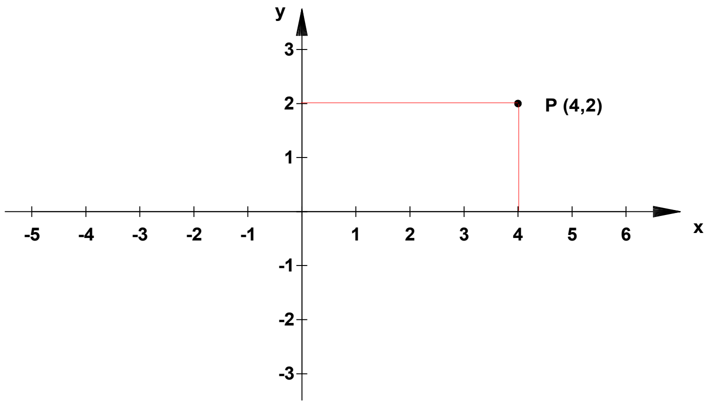
können durch einen Punkt auf einer Geraden bildlich dargestellt werden:



b) Punkte in einer Ebene

Die Darstellung der reellen Zahlen bildet ein eindimensionales Objekt, eine Gerade.
Mit einer Dimension mehr kommen wir zu einem zweidimensionalen Objekt, einer Ebene.
Gibt es Zahlen, deren bildliche Darstellung ein Punkt dieser Ebene ist?

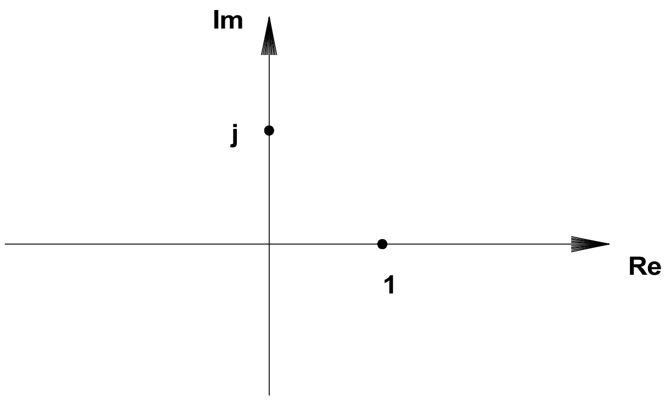
Jeder Punkt in der Ebene kann durch zwei reelle Zahlen beschrieben werden, seine Koordinaten:



Eine Koordinate lesen wir an der x-Achse ab, die andere an der y-Achse die dazu senkrecht steht.

c) Drehoperator j

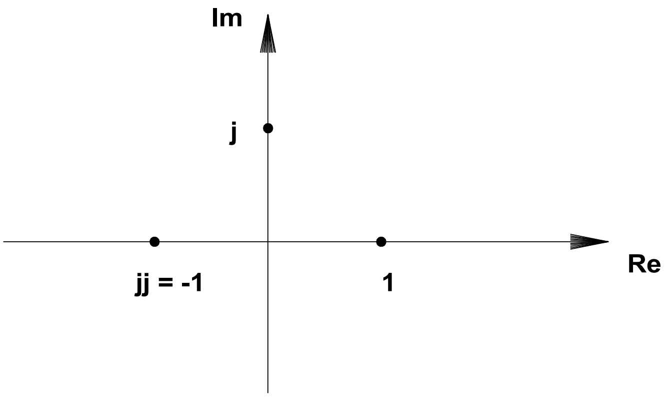
Wie können wir aus der horizontalen x-Achse die senkrechte y-Achse erzeugen?
Indem wir sie um 90° drehen. Dazu definieren wir den Drehoperator j, welcher jedes Objekt in der Ebene um 90° gegen den Uhrzeigersinn dreht.
Wir notieren die Operation mathematisch als Multiplikation mit j.



Die horizontale Achse ist die Achse der reellen Zahlen (reelle Achse).

Die vertikale Achse ist die Achse der sogenannten imaginären Zahlen (imaginäre Achse).

d) Spezielle Eigenschaft von j



Wird der Drehoperator zweimal auf die reelle Zahl 1 angewendet, so erhält man:

$1 \cdot j = j$
$j \cdot j = -1$

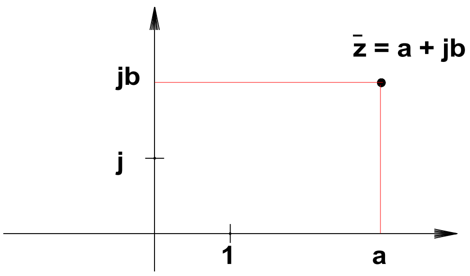
$j^2 = -1$

$j = \sqrt{-1}$

j ist die Quadratwurzel aus –1, dies ist ein weiteres Argument dafür, dass j keine reelle Zahl ist.

e) Komplexe Zahlen

Statt einen Punkt der Ebene zwei reelle Zahlen, seine Koordinaten zu definieren, kann dies durch eine einzige komplexe Zahl geschehen. Diese besitzt einen Real- und einen Imaginärteil.

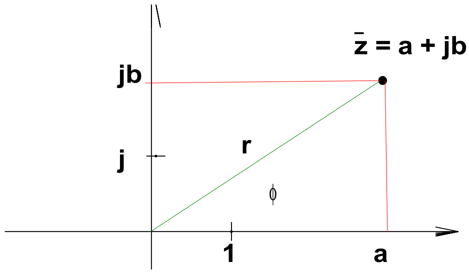


Schreibweise in **Komponentenform:**

$\bar{z} = a + jb$
a = Re() = Realteil
b = Im() = Imaginärteil

*Achtung: das j gehört **nicht** zum Imaginärteil!*

Beim Multiplizieren und Dividieren von komplexen Zahlen ist es günstiger, diese in Polarform (Exponentialfaktor) zu schreiben:



$\bar{z} = r \cdot e^{j\varphi}$

mit

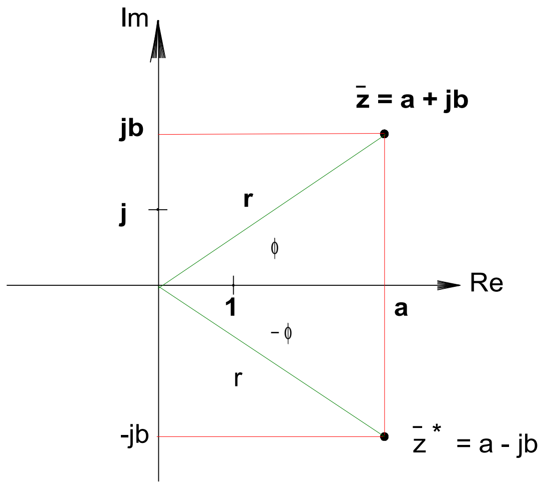
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ Betrag

$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ Winkel

f) Gleichheit von komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen sind gleich wenn sowohl Real- als auch Imaginärteil übereinstimmen bzw. wenn Betrag und Winkel übereinstimmen.

g) Konjugiert komplexe Zahlen



$\bar{z} = a + jb$

Spiegelung an der reellen Achse erzeugt die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}^*$:

$\bar{z}^* = a - jb$

$\bar{z}^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

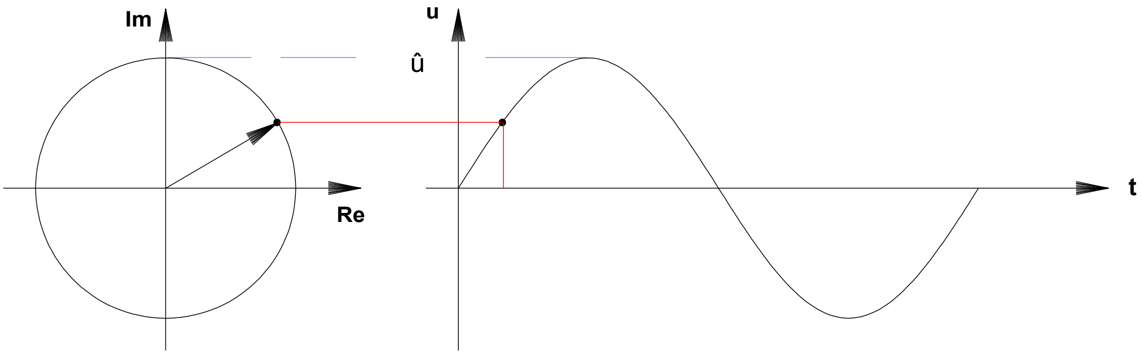
<u>Aufgabe 1.1</u>

a) Berechne: j^3, j^4 , $1/j$
b) Addiere $\bar{z}_1 = 2 + j3$ und $\bar{z}_2 = 4 - j5$
c) Rechne $\bar{z}_1$ und $\bar{z}_2$ in Exponentialform um
d) Berechne das Produkt von $\bar{z}_1$ und $\bar{z}_2$ und dessen konjugiert komplexe Zahl.
e) Rechne $\bar{z}_3 = e^{j90°}$ und $\bar{z}_4 = e^{-j90°}$ in Komponentenform um.
f) Was ist $\bar{z}_5 = e^{j180°}$? Vergleiche mit $\bar{z}_6 = e^{-j180°}$
g) Eine der schönsten Formeln der Mathematik schreibt sich: $e^{j\pi} + 1 = 0$
Wieso stimmt sie?

4. Komplexe Darstellung einer Sinusschwingung

Sinusschwingung: $u = \hat{u}\ \sin(\omega t)$

Zeigerdarstellung und Liniendiagramm:



Zeigerdiagramm:
Darstellung als rotierender Zeiger bzw. als rotierende komplexe Zahl mit Betrag û

Liniendiagramm (zeitliche Darstellung)

$\overline{u} = \hat{u}\ e^{j\omega t}$

$u = \hat{u}\ \sin(\omega t)$

Mit Phasenverschiebung:

$\overline{u} = \hat{u}\ e^{j(\omega t+\varphi)}$	$u = \hat{u}\ \sin(\omega t + \varphi)$

Da zwischen beiden Darstellungen ein eineindeutiger (d.h. umkehrbar eindeutiger) Zusammenhang besteht, können Berechnungen von Schaltungen sowohl im Zeitbereich als auch in komplexer Darstellung durchgeführt werden. Es stellt sich heraus, dass die Berechnung im komplexen Bereich oft wesentlich einfacher als die im Zeitbereich ist.

5. Komplexe Impedanzen

Zweck:
Das Rechnen mit komplexen Impedanzen erlaubt es, auf einfache Weise die Eigenschaften einer Schaltung zu berechnen, z.B. die Verstärkung und die Phasenverschiebung einer OPV-Schaltung.

Die folgenden Formeln gelten für komplexe Impedanzen, wenn man alle Widerstände durch die entsprechenden Impedanzen ersetzt:

- Ohmsches Gesetz
- Kirchhoff für Strom und Spannung
- Formeln für Reihen- und Parallelschaltung
- Spannungsteiler
- Formeln für die Verstärkung einer OPV-Schaltung
  (hier ist Vu durch die komplexe Verstärkung $\overline{F}$ zu ersetzen)

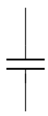
Definition:
Die komplexe Impedanz ist das Verhältnis von komplexer Spannung zu komplexem Strom (Ohmsches Gesetz):

$$\overline{Z}=\frac{\overline{u}}{\overline{i}}$$

Komplexe Impedanzen für R, L und C:

$$\overline{Z}=R$$

$$\overline{Z}=j\omega\cdot L$$

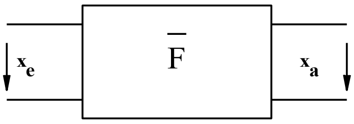


$$\overline{Z}=\frac{1}{j\omega\cdot C}$$

Aufgabe 1.2:
Beweise die obigen Formeln.
Hinweis:
Stelle zuerst die Gleichungen für die Momentanwerte von Spannung und Strom auf.
Leite daraus die Formeln für komplexe Spannung und komplexen Strom ab und wende die Definition an.

6. Frequenzgang

Die folgenden Überlegungen gelten für ein **lineares** Regelkreisglied:



Wenn x_e sinusförmig ist, dann ist auch x_a sinusförmig.

Das Ausgangssignal hat im Allgemeinen eine andere Amplitude und eine andere Phasenlage als das Eingangssignal.. Beide sind abhängig von der Frequenz des Eingangssignals.

Eingangssignal: $x_e = E \sin(\omega t)$

Ausgangssignal: $x_a = A \sin(\omega t + \varphi)$

In komplexer Schreibweise :

$$\bar{x}_e = E \cdot e^{j\omega t}$$

$$\bar{x}_a = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Der Frequenzgang $\bar{F}$ ist definiert als das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal:

$$\bar{F} = \frac{\bar{x}_a}{\bar{x}_e}$$

$$\bar{F} = \frac{A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{E \cdot e^{j\omega t}}$$

$$\bar{F} = \frac{A \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi}}{E \cdot e^{j\omega t}}$$

$$\bar{F} = \frac{A}{E} \cdot e^{j\varphi}$$

$|\bar{F}| = \frac{A}{E}$ ist der Betrag von $\bar{F}$ (Verstärkung)

$e^{j\varphi}$ gibt die Phasendrehung an.

In der Formel für $\bar{F}$ hat sich die Zeitabhängigkeit heraus gekürzt, $\bar{F}$ ist nur noch abhängig von der Frequenz.

7. Bodediagramm

$\bar{F}$ ist ein komplexer Zeiger, welcher je nach Frequenz seinen Betrag (d.h. seine Länge) und seinen Winkel ändert. Die Abhängigkeit von der Frequenz könnte mit Hilfe einer **Ortskurve** dargestellt werden (siehe Fach Elektrotechnik).

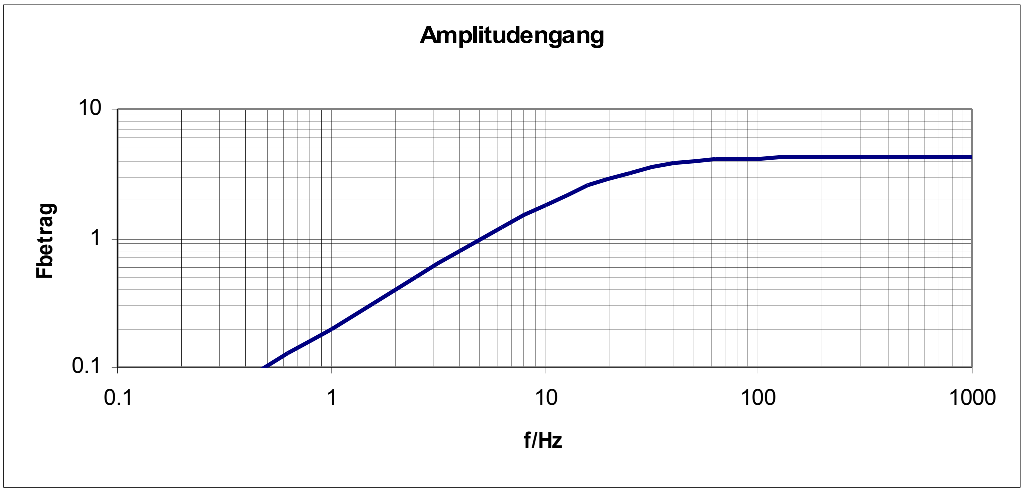
In der Regelungstechnik und in der Nachrichtentechnik ist eine Darstellung als **Bodediagramm** üblicher. Das Bodediagramm ist ein doppeltes Diagramm, es gibt die Abhängigkeit des Betrages $|\bar{F}|$ (Verstärkung) und des Phasenwinkels φ in Abhängigkeit von der Frequenz an.

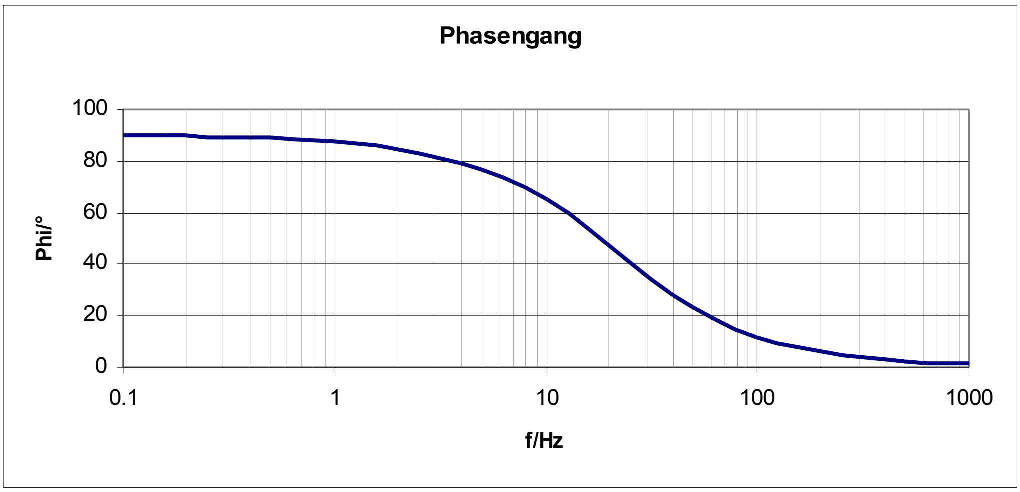
Der **Amplitudengang** ist die Abhängigkeit des Betrages $|\bar{F}|$ von der Frequenz .

Der **Phasengang** ist die Abhängigkeit des Phasenwinkels φ in Abhängigkeit von der Frequenz.

Normalerweise wird der Amplitudengang in doppelt logarithmischer Darstellung oder in dB und der Phasengang in halblogarithmischer Darstellung aufgetragen.

Beispiel eines Bodediagramms:

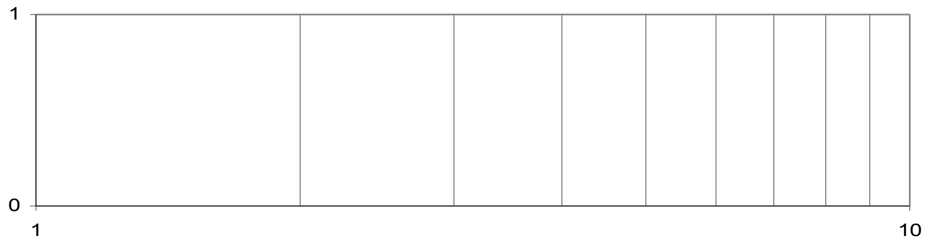




Aufgabe 1.3:

- Wie ändert sich die Verstärkung des durch obiges Diagramm beschriebenen Regelkreisgliedes mit der Frequenz?
- Reagiert das Glied stärker auf schnelle oder auf langsame Änderungen des Eingangssignals?
- Bei welcher Frequenz ist die Amplitude des Ausgangssignals gleich der Amplitude des Eingangssignals. Gilt die Gleichheit auch für die Phase ?
- Welche Verstärkung ergibt sich für unendlich hohe Frequenzen?

Bemerkung zur logarithmischen Skala:
Statt die Skalenstriche bei einer Länge zu machen, die dem Wert x selbst entspricht, macht man sie bei einer Länge die dem Logarithmus des Wertes entspricht. Man schreibt aber die Werte x an die Skala.



Man kann sich merken, dass 3 etwa in der Mitte, 2 und 5 je etwa ein Drittel vom entsprechenden Ende liegen.

8. Verstärkungsangaben in Dezibel

Das Dezibel ist ein logarithmisches Maß für Leistungsverhältnisse bzw. Leistungs-verstärkung:

$$v = 10dB \cdot \log \frac{P_2}{P_1}$$

Man kann die Formel nach einem Spannungsverhältnis umstellen. Diese Formel gibt eigentlich das Verhältnis der Leistungen an, welche die Spannungen U_2 und U_1 an einem (für beide gleich großen) Referenzwiderstand bewirken würden.

Aufgabe 1.4:
Stelle die obige Formel um, so dass der dB-Wert der Verstärkung mit den Spannungen gerechnet werden kann.

Ergebnis:

$$\boxed{v = 20dB \cdot \log \frac{U_2}{U_1}}$$

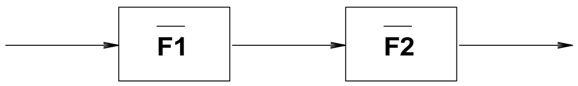
Wichtige dB-Werte:

U2/U1	v[dB]
100	40
10	20
1.41	3
1	0
0.707	-3
0.1	-20
0.01	-40

9. Schaltungen von Regelkreisgliedern

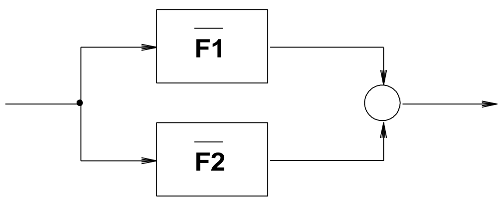
Die folgenden Regeln erlauben es, komplexe Schaltungen zu vereinfachen.

a) Reihenschaltung



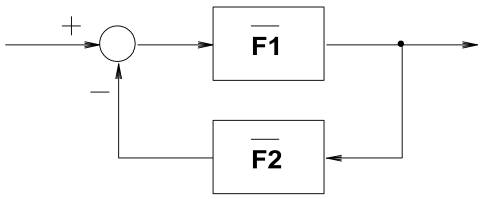
$$\bar{F} = \bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2$$

b) Parallelschaltung



$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

c) Rückführschaltung (Schaltung mit Gegenkopplung)



$$\bar{F} = \frac{\bar{F}_1}{1 + \bar{F}_1 \cdot \bar{F}_2}$$

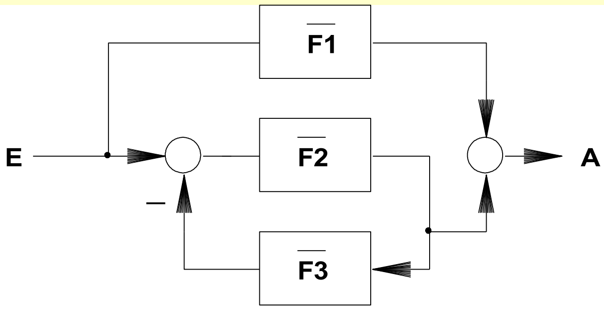
Achtung: die Gegenkopplung (-) bewirkt ein + in der Formel!

Bei Mitkopplung (+) ergäbe sich ein - in der Formel und der Nenner könnte je nach Bauteilwerten 0 werden, dann wäre $\bar{F}$ unendlich und die Schaltung würde schwingen (Oszillator)

Aufgabe 1.5:
Beweise die Richtigkeit der obigen Formeln indem du die Definition des komplexen Frequenzgangs und Zwischenvariablen benutzt.

Aufgabe 1.6:
Wende die oben hergeleitete Theorie an, um den Frequenzgang eines nicht invertierenden OPV-Verstärkers zu bestimmen. Was geschieht, wenn die Verstärkung des OPV sehr groß (unendlich) ist ?

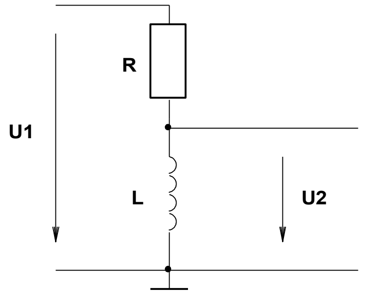
Aufgabe 1.7
Berechne den Frequenzgang der folgenden Schaltung:



d) Schaltungen mit diskreten (einzelnen) Bauteilen

Alle Formeln wie Ohmsches Gesetz, Kirchhoff, die Formeln für OPV-Schaltungen sind gültig, wenn man die komplexen Impedanzen, komplexe Spannungen und Ströme und die komplexe Verstärkung $\bar{F}$ in den Formeln benutzt.

Beispiel:



$$\bar{U}_2 = U \cdot \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$\bar{F} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1}$$

$$\bar{F} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$